A.A. SAMARSKII

MÉTHODES AUX DIFFÉRENCES POUR ÉQUATIONS ELLIPTIQUES

A. SAMARSKI, V. ANDRÊEV

MÉTHODES AUX DIFFÉRENCES POUR ÉQUATIONS ELLIPTIQUES

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

AVANT-PROPOS

Beaucoup de processus établis de diverse nature physique sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles de type elliptique. Exemples: les problèmes stationnaires de la conductivité thermique et de la diffusion, de la distribution du courant dans un milieu conducteur, d'électrostatique et de magnétostatique, de la théorie de l'élasticité, de la filtration, etc.

Les problèmes aux limites posés pour les équations elliptiques n'admettent une solution exacte que dans des cas particuliers. Il faut donc savoir les résoudre approximativement.

Le présent ouvrage développe l'une des méthodes les plus universelles et les plus effectives de résolution des équations elliptiques: la méthode des différences finies.

La résolution se déroulera en deux étapes:

1) substitution à l'équation différentielle et aux conditions subsidiaires (par exemple des conditions aux limites) d'un système d'équations discrètes (construction du schéma discret);

2) résolution du système d'équations discrètes.

Dans cet ouvrage on n'aborde que les questions qui touchent à la construction et à l'étude des schémas discrets. Les méthodes (directes et itératives) de résolution d'équations discrètes approchant des équations elliptiques feront l'objet d'un ouvrage à part.

Les auteurs se penchent ici essentiellement sur la construction d'approximations discrètes des équations et conditions subsidiaires pour des problèmes types de physique mathématique. On se limitera à l'étude des problèmes correspondant à des équations et systèmes d'ordre deux et quatre, en mettant un accent particulier sur ceux qui présentent un intérêt pratique immédiat. Pour cette raison on a jugé opportun de poser de nombreux problèmes de physique mathématique (chap. 1), de les mettre en équation avec des conditions aux limites.

Les approximations discrètes des équations elliptiques peuvent être utilisées dans la construction de schémas discrets pour les processus non stationnaires de physique mathématique, rattachés à des équations de type parabolique ou hyperbolique.

Pour ne pas alourdir l'exposé on étudiera essentiellement des schémas pour équations de deux variables indépendantes, la généralisation à trois variables ne posant en principe pas de difficultés si ce n'est des formules fastidieuses.

Lorsqu'on composera un schéma discret on ne devra pas perdre de vue le temps de calcul nécessité par la résolution des systèmes d'équations discrètes obtenus. On se limitera donc à l'étude de schémas élémentaires avec un stencil minimal assurant une approximation d'ordre deux (ou quatre). Ces schémas sont très largement utilisés.

En construisant des schémas discrets on prendra garde à ce que non seulement ils approchent bien le problème initial, mais qu'ils en simulent également dans l'espace des fonctions discrètes les propriétés fondamentales (telles que l'autoconjugaison, l'ellipticité, etc.). Cette question est soigneusement traitée.

On dispose d'un grand nombre de méthodes pour construire des approximations discrètes pour problèmes elliptiques. Le détail de ces méthodes sort du cadre de cet ouvrage.

Les diverses méthodes de construction des schémas discrets sont développées sur des problèmes élémentaires en dimension un. Cette approche permet de dégager le principe de telle ou telle méthode sans alourdir l'exposé par les détails techniques qui sont le lot des équations générales.

On mesure la qualité d'un schéma discret avant tout à sa précision. L'étude des schémas discrets repose sur l'analyse détaillée de leur erreur d'approximation et leur stabilité, seuls critères de précision.

L'étude de la stabilité des schémas discrets se ramène à la déduction d'estimations à priori des solutions de problèmes aux limites discrets. S'agissant des schémas discrets correspondant aux équations elliptiques, on connaît de nombreuses estimations à priori qui imitent plus ou moins celles des équations différentielles.

Les estimations à priori revêtent un caractère essentiellement illustratif. Elles ne sont pas établies pour tous les schémas étudiés, mais on peut les déduire au besoin à l'aide des méthodes exposées aux chapitres III, V, VI.

Les schémas discrets sont le plus amplement étudiés pour l'équation de Poisson dans les divers systèmes de coordonnées (chap. III).

Au chapitre IV on traite des schémas discrets pour les principaux problèmes aux limites dans le cas d'équations elliptiques du second ordre (avec et sans dérivées mixtes, d'ordre supérieur, schémas sur réseaux irréguliers, etc.) pour un système d'équations de la théorie de l'élasticité, ainsi que pour des équations d'ordre quatre.

On examine en détail les approximations des conditions de conjugaison et des conditions aux limites de diverses espèces pour équations d'ordre deux et quatre.

Au chapitre V, on introduit l'appareil mathématique minimal de la théorie des schémas discrets (formules de Green discrètes, problèmes aux valeurs propres pour opérateurs discrets, théorèmes de plongement discrets, etc.), qui est appliqué au chapitre VI à la déduction de certaines estimations à priori par la méthode des inégalités de l'énergie.

Les méthodes de construction des schémas discrets peuvent être généralisées aux approximations discrètes pour équations non linéaires. Les schémas non linéaires ne sont pas étudiés, car leurs estimations à priori sont plus délicates et plus longues à obtenir.

Cet ouvrage a son origine dans les cours professés par les auteurs aux élèves des facultés de mécanique-mathématiques et de physique ainsi qu'à la faculté de calcul numérique et de cybernétique de l'Université de Moscou. Il s'adresse à un large éventail de lecteurs et peut servir de manuel dans l'étude des méthode discrètes de résolution d'équations de physique mathématique. L'exposé simple et systématique ne suppose au lecteur aucune connaissance des schémas discrets.

Les auteurs tiennent à exprimer leur gratitude à I. Béloukhina pour son aide à la préparation du manuscrit.

A. Samarski, V. Andréev.

CHAPITRE 1

PROLOGUE

§ 1. Exemples de problèmes se ramenant à des équations elliptiques

1. Problèmes stationnaires sur la chaleur et la diffusion. Les processus stationnaires (i. e. qui ne dépendent pas du temps) de diverse nature physique sont décrits par des équations différentielles de type elliptique, dans le cas le plus simple (dans un milieu homogène en l'absence de sources), par l'équation de Laplace. Exemple: problèmes sur la chaleur, la diffusion, l'électrostatique, la magnétostatique, l'écoulement potentiel d'un fluide, etc.

Examinons le problème de la distribution stationnaire de la chaleur dans un volume G de surface Γ contenu dans un espace de dimension trois $x = (x_1, x_2, x_3)$. Le transfert de la chaleur (ou conductibilité thermique) est exprimé par la *loi de Fourier*: le vecteur densité du flux de chaleur $\boldsymbol{W}$ est proportionnel au gradient de la température $u = u(x)$, soit

$$\boldsymbol{W} = -k \operatorname{grad} u, \tag{1}$$

où $k = k(x)$ est le *coefficient de conductibilité thermique*. La densité du flux de chaleur est égale à la quantité de chaleur qui traverse dans l'unité de temps l'élément unité de surface isothermique.

Ecrivons l'équation de l'équilibre thermique pour un volume V, entièrement contenu dans G et de surface S. Supposons qu'il y ait à l'intérieur de V des sources de chaleur distribuées avec la densité $f(x)$, de sorte que $f(x)\,dV$ est la quantité de chaleur diffusée dans dV.

Soit W_n la projection du vecteur $\boldsymbol{W}$ sur la normale extérieure $\boldsymbol{n}$ à la surface S. L'équation de l'équilibre thermique traduit un fait évident, savoir que le flux total de chaleur passant à travers la surface S, soit

$$\iint_S W_n\, dS,$$

doit être égal à la quantité de chaleur

$$\iiint_V f(x)\, dV$$

dégagée dans le volume V, i.e.

$$\iint_S W_n \, dS = \iiint_V f(x) \, dV. \tag{2}$$

En utilisant la formule de la divergence ou d'Ostrogradski

$$\iint_S W_n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} W \, dV$$

on met l'équation (2) sous la forme

$$\iiint_V (\operatorname{div} W - f(x)) \, dV = 0. \tag{2'}$$

Si $f(x)$ et div W sont des fonctions continues du point $x = (x_1, x_2, x_3)$, alors le volume V de (2') étant arbitraire, on a

$$\operatorname{div} W = f(x). \tag{3}$$

En y portant l'expression (1) du vecteur W, on obtient l'équation en la température stationnaire $u = u(x)$:

$$Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f(x), \tag{4}$$

ou dans une forme détaillée:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = -f(x_1, x_2, x_3). \tag{4'}$$

Le coefficient k est une fonction du point $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$k = k(x) = k(x_1, x_2, x_3).$$

Si le milieu est homogène, le coefficient de conductibilité thermique k ne dépend pas de x, i.e. $k = \text{const}$ et la distribution stationnaire de la température $u = u(x)$ est exprimée par l'équation de Poisson

$$\Delta u = -\bar{f}(x), \quad \bar{f} = f/k.$$

Il est plus commode de conserver $f(x)$ au second membre et d'écrire

$$\Delta u = -f(x), \tag{5}$$

ou en développant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -f(x). \tag{5'}$$

S'il n'y a pas de sources de chaleur, i.e. $f(x) \equiv 0$, on obtient alors l'équation homogène suivante en $u = u(x)$

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0,$$

(ou l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ si $k = \text{const}$).

L'équation de la chaleur (4) a été établie sous l'hypothèse d'un processus isotrope de transfert de la chaleur. Si le coefficient de conductibilité thermique dépend de la direction et est un tenseur (milieu anisotrope), au lieu de (4) on obtient l'équation

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x). \tag{6}$$

Si $k_{\alpha\beta} \equiv 0$ lorsque $\alpha \neq \beta$, l'équation (6) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k_{33}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right] = -f.$$

L'équation (4) est satisfaite en tous les points intérieurs du domaine G. A la frontière Γ on donne des conditions subsidiaires de l'une des formes suivantes:

a) la température

$$u = g(x) \text{ pour } x \in \Gamma;$$

b) le flux de chaleur

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \text{ pour } x \in \Gamma;$$

c) *l'échange thermique obéit à la loi de Newton*:

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa u + g(x), \quad x \in \Gamma, \quad \text{où} \quad \varkappa = \varkappa(x) > 0.$$

On obtient ainsi trois problèmes aux limites consistant à trouver une fonction $u(x)$ continue dans le domaine fermé $G + \Gamma$:

a) le premier, ou problème de Dirichlet, à partir des conditions

$$Lu = -f(x) \text{ pour } x \in G, \quad u = g(x) \text{ pour } x \in \Gamma;$$

b) le second, ou problème de Neumann, à partir des conditions

$$Lu = -f(x) \text{ pour } x \in G, \; k\frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \text{ pour } x \in \Gamma;$$

c) le troisième, à partir des conditions

$$Lu = -f(x) \text{ pour } x \in G, \; k\frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa u + g(x) \text{ pour } x \in \Gamma.$$

On remarquera que le problème de Neumann admet une solution si et seulement si est réalisée la condition

$$\int_\Gamma g(x)\,d\sigma + \int_G f(x)\,dx = 0, \tag{7}$$

qui, dans le cas de l'équation homogène ($f \equiv 0$), s'écrit

$$\int_{\Gamma} g(x)\, d\sigma = 0. \tag{8}$$

Cette condition exprime le fait que la quantité de chaleur reçue par le domaine G doit être égale à la quantité de chaleur cédée (sinon le processus ne serait pas stationnaire).

Les processus de diffusion de la matière présentent beaucoup d'affinités avec les processus de conductibilité thermique. Dans la diffusion l'analogue de la loi fondamentale de conductibilité thermique est la *loi de Nernst* en vertu de laquelle le vecteur densité du flux de matière $\boldsymbol{W}$ est proportionnel au gradient de la concentration $u = u(x)$:

$$\boldsymbol{W} = -D \operatorname{grad} u,$$

où $D = D(x)$ est le coefficient de diffusion. En portant cette expression dans l'équation (3) avec $f(x) = 0$ (ce qui traduit l'absence de sources de matière diffusante), on obtient l'équation de la diffusion

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) = 0,$$

qui, dans le cas d'un milieu homogène ($D = \text{const}$) se transforme en l'équation de Laplace $\Delta u = 0$.

Si le milieu qui est le siège de la diffusion se déplace à une vitesse $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, l'équation de diffusion en la distribution stationnaire de la concentration $u = u(x)$ s'écrit

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(\boldsymbol{v}u) = 0 \tag{9}$$

ou

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,$$

si $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ (milieu incompressible). En effet, si le milieu est en mouvement, le flux total de matière est composé du flux diffusant, qui est égal à $-D \operatorname{grad} u$, et du flux de transfert ou flux de translation, qui est égal à $u\boldsymbol{v}$, soit

$$\boldsymbol{W} = -D \operatorname{grad} u + u\boldsymbol{v}.$$

Reste maintenant à porter cette expression dans (3) pour $f \equiv 0$ (i.e. en l'absence de sources).

La diffusion est susceptible de s'accompagner d'une réaction de désintégration ou de reproduction de la matière considérée, ce qui se traduira par l'apparition de débits ou de sources. Si la densité de ces sources (débits) est par exemple proportionnelle à la concentration, au lieu de (9) on obtient l'équation

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - (\boldsymbol{v} \operatorname{grad} u) + \beta u = 0, \tag{10}$$

où β est le coefficient de proportionnalité (pour $\beta > 0$ on a une source (accroissement de matière), pour $\beta < 0$ un débit).

Remarque 1. D'autres problèmes ramènent à ces équations. Voyons par exemple le problème d'un champ électrostatique en milieu non conducteur. Ce problème est décrit par les équations de Maxwell

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \quad Q = \varepsilon \boldsymbol{E},$$

où $\boldsymbol{E}$ est le vecteur intensité du champ électrique, $\boldsymbol{D}$, le vecteur induction électrique, $\varepsilon = \varepsilon(x)$, la constante diélectrique du milieu, $\rho = \rho(x)$, la densité volumétrique des charges au point $x = (x_1, x_2, x_3)$. L'équation $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ entraîne que $\boldsymbol{E}$ est le vecteur potentiel; on peut l'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u,$$

où $u = u(x)$ est le potentiel du champ. En portant $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$ dans l'équation $\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$, on obtient

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho.$$

Si le milieu est homogène ($\varepsilon = \text{const}$), alors

$$\Delta u = -4\pi\rho/\varepsilon;$$

dans le vide ($\varepsilon = 1$) on aura $\Delta u = -4\pi\rho$.

Si le problème est stationnaire, à partir des équations de Maxwell on déduit pour le vecteur intensité du champ magnétique les équations de magnétostatique

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}.$$

Comme dans l'électrostatique, introduisons le potentiel u du champ magnétique qui en milieu homogène ($\mu = \text{const}$) vérifie l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, et de plus $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} u$.

Remarque 2. Le potentiel des vitesses φ d'un flux stationnaire de fluide incompressible vérifie de même l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$, et de plus la vitesse $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$.

Si la solution de l'équation (4) ne dépend pas de x_3 (ce qui de toute évidence ne peut avoir lieu que si $f = f(x_1, x_2)$, $k = k(x_1, x_2)$, les conditions aux limites ne dépendent pas de x_3, et les domaines sont d'une forme spéciale), on obtient pour la détermination de $u = u(x_1, x_2)$ l'équation en dimension deux

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x_1, x_2).$$

Ceci peut avoir lieu par exemple dans le cas d'un domaine cylindrique infini dont la génératrice est dirigée suivant x_3, sous réserve que les données initiales, i.e. les coefficients et les seconds membres de l'équation et des conditions aux limites, ne varient pas. Le problème

peut être alors posé dans toute section transversale du cylindre, parallèle au plan (x_1, x_2).

Dans la suite, pour alléger l'exposé nous n'étudierons que des problèmes en dimension deux. Le passage aux problèmes elliptiques en dimension trois ne pose en principe pas de difficultés, si ce n'est la complication des calculs et des formules.

2. Problèmes de distribution stationnaire de la densité du courant en milieu conducteur. Les problèmes de distribution stationnaire des champs électrique et magnétique conduisent aux équations elliptiques. Ces problèmes sont décrits par un système d'équations de Maxwell qui, dans le cas stationnaire, s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} &= 0, \qquad \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \end{aligned} \tag{11}$$

où $\boldsymbol{E}$ est le vecteur tension du champ électrique, $\boldsymbol{H}$, le vecteur tension du champ magnétique, $\boldsymbol{j}$, le vecteur densité volumétrique du courant électrique, ρ, la densité volumétrique des charges électriques, μ, la constante magnétique, ε, la constante diélectrique.

ε et μ sont des tenseurs dépendant du point $x = (x_1, x_2, x_3)$ si le milieu est anisotrope et non homogène, des fonctions scalaires de x si le milieu est isotrope et des constantes positives si le milieu est homogène et isotrope. On suppose que $\mu = 1$ dans un milieu diélectrique, $\varepsilon = 1$ dans un milieu conducteur, et $\varepsilon = \mu = 1$ dans le vide.

Dans le cas général, au lieu de $\boldsymbol{j}$ dans l'équation (11) figure la somme $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^{(e)}$, où $\boldsymbol{j}^{(e)}$ est le vecteur densité volumétrique du courant, engendré par des forces électromotrices étrangères. Nous supposons ici que $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$. Si le milieu n'est pas conducteur, alors $\boldsymbol{j} = 0$. Les équations de magnétostatique ($\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$, $\operatorname{div} \mu\boldsymbol{H} = 0$) sont valables en milieu non conducteur.

La condition $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ exprime, on le rappelle, la potentialité du vecteur $\boldsymbol{E}$, la condition $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$, qui a lieu pour $\mu = \text{const}$, la solénoïdalité du vecteur $\boldsymbol{H}$, i.e. l'existence d'un potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$. Le vecteur $\boldsymbol{A}$ vérifie l'équation de Poisson $\Delta \boldsymbol{A} = (-4\pi/c)\,\boldsymbol{j}$. En effet, la première équation (11) donne

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = -\Delta \boldsymbol{A} = -(4\pi/c)\,\boldsymbol{j}.$$

L'étude de la distribution stationnaire du courant en milieu conducteur donne lieu à d'intéressants problèmes. Les équations de Maxwell entraînent la loi de la conservation de la charge électrique

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

à laquelle il convient d'adjoindre la condition de potentialité du champ électrique qui est exprimée par la formule

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u. \tag{12}$$

Entre les vecteurs densité du courant $\boldsymbol{j}$ et tension du champ électrique il existe une relation qui est traduite par la *loi d'Ohm*

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{13}$$

où σ est le coefficient de conductibilité électrique, qui est une fonction scalaire de $x = (x_1, x_2, x_3)$ si la conductibilité du milieu ne dépend pas de la direction (le milieu est isotrope en la conductibilité); dans le cas contraire σ est un tenseur. Les deux dernières formules entraînent: $\boldsymbol{j} = -\sigma \operatorname{grad} u$. De là et de $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$, on déduit l'équation du potentiel: $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0$ qui, dans sa forme développée, s'écrit

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \quad \text{en milieu anisotrope,}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{en milieu isotrope,}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{en milieu homogène et isotrope}$$

Sur une surface conductrice, la composante tangentielle du vecteur du champ électrique est nulle, ce qui équivaut à la constance du potentiel: $u = \text{const}$ (condition aux limites de première espèce). En particulier, $u \equiv 0$ sur une surface conductrice parfaitement mise à terre. Sur la frontière d'un conducteur possédant un diélectrique la composante normale de la densité du courant électrique $\left(j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\right)$ est nulle, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ (condition aux limites de seconde espèce).}$$

En étudiant les écoulements des fluides et des gaz dans les conduites magnétohydrodynamiques, ou encore le comportement du plasma en déséquilibre dans d'intenses champs magnétiques, etc., on est confronté à des problèmes stationnaires d'électrodynamique dans un volume fini, caractérisés par la loi généralisée d'Ohm qui lie le vecteur $\boldsymbol{j}$ tant à $\boldsymbol{E}$ qu'à $\boldsymbol{H}$.

On remarquera préalablement que dans un milieu en mouvement à la vitesse $\boldsymbol{v}$, la loi d'Ohm (13) s'écrit

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]). \tag{14}$$

Si le milieu se déplace à la vitesse $\boldsymbol{v}$ et que l'on tienne compte de l'effet Hall, on obtient la loi généralisée d'Ohm

$$\boldsymbol{j} + [\boldsymbol{j}\boldsymbol{\Omega}] = \sigma(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]), \quad \boldsymbol{\Omega} = \beta \frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|}, \tag{15}$$

où β est le paramètre de Hall, $\sigma > 0$ le coefficient de conductibilité électrique. Si le paramètre de Hall $\beta = 0$, l'équation en $\boldsymbol{j}$ se transforme en l'expression de la loi ordinaire d'Ohm dans un milieu en mouvement.

Si l'on admet que les courants de déplacement et les champs magnétiques induits sont négligeables, on peut considérer que le champ magnétique est constant et donné.

On supposera données les distributions spatiales de la conductibilité σ, du paramètre de Hall β et de la vitesse $\boldsymbol{v}$ du milieu. En général ces grandeurs s'obtiennent par la résolution d'autres équations, par exemple, des équations de la mécanique des fluides magnétiques, de la loi de conservation de l'énergie des électrons, etc.

Dans la suite, on se limitera à l'étude du problème bidimensionnel en supposant que les vecteurs $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{v}$ ne dépendent pas de la coordonnée x_3 et sont contenus dans le plan (x_1, x_2) de sorte que

$$\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, 0), \quad \boldsymbol{E} = (E_1, E_2, 0), \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 0),$$

et que le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ et le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ sont orthogonaux au plan (x_1, x_2):

$$\boldsymbol{H} = (0, 0, H), \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega).$$

Les fonctions j_1, j_2, E_1, E_2, v_1, v_2, H et Ω dépendent uniquement de x_1 et x_2. Dans ce cas les équations rot $\boldsymbol{E} = 0$, div $\boldsymbol{j} = 0$ et la loi d'Ohm (15) s'écrivent

$$\begin{gathered} \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} = 0, \\ j_1 + \Omega j_2 = \sigma (E_1 + v_2 H), \quad j_2 - \Omega j_1 = \sigma (E_2 - v_1 H). \end{gathered} \tag{16}$$

Nous avons ici quatre équations en quatre fonctions inconnues E_1, E_2, j_1, j_2; les fonctions v_1, v_2, H, Ω et σ sont données.

Etudions ces équations dans un domaine fini G de frontière Γ. Les conditions aux limites doivent être données sur Γ. Considérons les conditions aux limites suivantes.

a) On donne la composante normale du vecteur densité du courant électrique qui traverse la frontière:

$$j_n = g(s) \text{ sur } \Gamma,$$

où $g(s)$ est une fonction connue de la longueur d'arc s, mesuré à partir d'un point de Γ, j_n, la projection du vecteur $\boldsymbol{j}$ sur la normale extérieure n à la courbe Γ.

Le cas $g(s) \equiv 0$ correspond à un diélectrique parfait, le cas $g(s) \neq 0$ à une électrode « parfaite sectionnée ».

b) La deuxième condition aux limites consiste à exiger la continuité de la composante tangentielle E_τ du vecteur du champ électrique sur la surface séparant deux milieux. Ainsi, la composante tan-

gentielle d'un champ électrique est nulle

$$E_\tau = 0$$

sur une électrode continue parfaitement conductrice. Dans le cas général, la frontière Γ est divisée en un nombre fini de parties γ_k sur lesquelles sont données des conditions aux limites de divers types.

Dans la suite nous supposerons que G est le rectangle $ABCD$ (fig. 1). La frontière Γ du domaine est constituée de parois diélectriques parfaites, à l'exception de deux électrodes $ab \subset AB$ et $cd \subset CD$ qui sont soit parfaitement sectionnées ($j_n \neq 0$), soit parfaitement conductrices ($E_\tau = 0$). Des équations (16) il s'ensuit que l'on peut introduire la fonction scalaire $\varphi(x_1, x_2)$ et poser

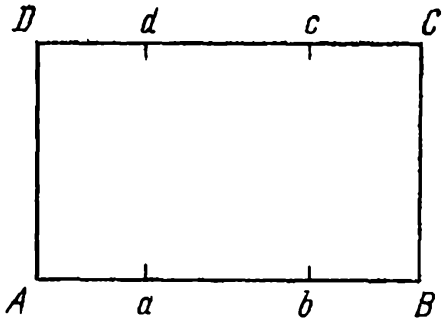


Fig. 1

$$E = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{ou} \quad E_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},$$

$$E_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},$$

ainsi que la fonction vectorielle (le potentiel vectoriel) $\psi = (0, 0, \psi(x_1, x_2))$ et poser

$$j = \operatorname{rot}\psi \quad \text{ou} \quad j_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad j_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

En portant ces expressions dans (15), on obtient

$$\begin{aligned} \Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= -\sigma v_2 H, \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= \sigma v_1 H. \end{aligned} \tag{17}$$

La condition aux limites $j_n = g(s)$ s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = g(s);$$

elle équivaut à la condition

$$\psi(x)|_{x\in\Gamma} = \nu(s) = \int g(s)\,ds. \tag{18}$$

Au lieu de $E_\tau = 0$ on obtient $\partial\varphi/\partial s = 0$, d'où il résulte que

$$\varphi(x)|_{x\in\Gamma} = \text{const}.$$

Le système d'équations du premier ordre en ψ et φ peut être aisément ramené par élimination de φ à une seule équation du deuxième ordre

en ψ:

$$L\psi = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) = f,$$

$$f = \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1 H) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_2 H) = \operatorname{div}(Hv).$$

Pour cela il suffit de multiplier les équations (17) par $1/\sigma$, de dériver la première par rapport à x_2, la seconde par rapport à x_1 et de soustraire la seconde de la première.

La condition aux limites $\psi(s) = \nu(s)$ reste en vigueur, quant à la condition $\varphi(s) = \text{const}$, elle se transforme, en vertu des équations (17), (18), en la condition de dérivabilité à gauche

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial s} = \sigma v_n H. \tag{19}$$

En effet, supposons que $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure et $\boldsymbol{\tau} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ le vecteur unitaire de la tangente à la courbe Γ. On remarquera tout d'abord que $v_n = v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\sin\alpha, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\sin\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cos\alpha.$$

Multiplions ensuite l'équation (17) par $-\sin\alpha$ et l'équation (18) par $\cos\alpha$ et additionnons:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial s} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \sigma v_n H.$$

D'où l'on déduit la condition (19) si l'on pose $\varphi(s) = \text{const}$ ou $\partial\varphi/\partial s = 0$. Si les paramètres σ et Ω sont constants, l'équation $L\psi = f$ se transforme en l'équation de Poisson

$$\Delta\psi = -\sigma f.$$

Nous obtenons donc le problème aux limites suivant:

$$\begin{aligned} L\psi &= f \quad \text{pour } x = (x_1, x_2) \in G. \\ \psi(s) &= \nu(s) \quad \text{sur } \gamma_1, \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial s} &= \sigma v_n H \quad \text{sur } \gamma_2, \end{aligned} \tag{19'}$$

où $\gamma_1 + \gamma_2 = \Gamma$.

Considérons la classe Ψ des fonctions ψ vérifiant les conditions homogènes (18) ou (19), ou (19').

L'opérateur L, défini sur la classe Ψ est positif:

$$(\psi, L\psi) = \int\int \psi L\psi\, dx_1\, dx_2 > 0,$$

et, d'une façon générale, non autoconjugué: $L \neq L^*$, i.e.

$$(\psi, \bar{L}\psi) \neq (L\psi, \bar{\psi})$$

quels que soient $\psi, \bar{\psi} \in \Psi$. On remarquera qu'en l'absence de courant de Hall, i.e. $\Omega \equiv 0$, l'opérateur $\mathring{L}$:

$$\mathring{L}\psi = -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{grad}\psi\right)$$

est autoconjugué, $\mathring{L} = \mathring{L}^*$.

Montrons par exemple la validité de $(\psi, L\psi) > 0$. Servons-nous à cet effet des formules de Green:

$$(\psi, L\bar{\psi}) = \iint_G \psi \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1} + \Omega\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \right) \right.$$

$$\left. -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \Omega\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right) \right\} dx_1\, dx_2 =$$

$$= \iint_G \frac{1}{\sigma}\nabla\psi\,\nabla\bar{\psi}\, dx_1\, dx_2 + \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \oint_\Gamma \psi\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}\right) ds. \qquad (20)$$

L'intégrande

$$\psi\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}\right) = F(s),$$

de la dernière intégrale s'annule si ψ et $\bar{\psi}$ réalisent l'une des conditions (18) ou (19), i.e. ψ et $\bar{\psi}$ appartiennent à la classe Ψ. En posant ensuite $\bar{\psi} = \psi$ dans la formule (20), on obtient aussitôt

$$(\psi, L\psi) = \iint_G \frac{1}{\sigma}|\nabla\psi|^2\, dx_1\, dx_2 = (\psi, \mathring{L}\psi) > 0.$$

La formule (20) entraîne

$$(\psi, L\bar{\psi}) = \iint_G \frac{1}{\sigma}\nabla\psi\,\nabla\bar{\psi}\, dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2,$$

$$(\bar{\psi}, L\psi) = \iint_G \frac{1}{\sigma}\nabla\psi\,\nabla\bar{\psi}\, dx_1\, dx_2 -$$

$$- \iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2,$$

i.e. $(\bar{\psi}, L\psi) = (L\bar{\psi}, \psi)$ si seulement

$$\iint_G \frac{\Omega}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2 = 0$$

condition qui est réalisée pour $\Omega = 0$.

3. Statique du solide élastique. Les solides se déforment, i.e. changent plus ou moins de forme et de volume, sous l'influence des forces qui leur sont appliquées. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ le rayon vecteur d'un point d'un solide, $x' = (x_1', x_2', x_3')$, le rayon vecteur du même point matériel après l'application de forces extérieures à ce solide. Le déplacement du point par la déformation est caractérisé par le vecteur $u = x' - x$, appelé *vecteur déplacement*, dont les composantes sont

$$u_i(x) = x_i' - x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Il est évident que l'état déformé du solide est entièrement décrit par la donnée du vecteur déplacement en chaque point du solide.

Dans le but de déduire les équations décrivant l'état déformé du solide (qui se trouve en équilibre par hypothèse), considérons un volume arbitraire V de ce solide, limité par une surface S. Ecrivons les conditions de nullité de la résultante de toutes les forces exercées sur le volume V. La résultante des forces volumiques est égale à

$$\iiint_V F\, dV,$$

où $F = (F_1, F_2, F_3)$ est la force appliquée à l'unité de volume du solide. La résultante des forces exercées sur ce volume par le biais de la surface S à partir des parties entourant le volume V est égale à

$$\iint_S f\, ds,$$

où $f \equiv (f_1, f_2, f_3)$ est la force agissant sur l'unité de surface. En égalant à zéro la somme des résultantes des forces volumiques et surfaciques, on obtient

$$\iiint_V F\, dV + \iint_S f\, dS = 0. \tag{21}$$

Transformons cette expression. En vertu de la formule d'Ostrogradski l'intégrale de surface

$$\iint_S f_i\, dS$$

de la fonction scalaire f_i peut être représentée sous la forme d'une intégrale de volume de la divergence d'un vecteur τ_i, i.e.

$$\iint_S f_i\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \tau_i\, dV, \tag{22}$$

où $\tau_i = \{\tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}\}$, et

$$f_i = \tau_{i1} \cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \tau_{i2} \cos(\boldsymbol{n}, x_2) + \tau_{i3} \cos(\boldsymbol{n}, x_3), \tag{23}$$

$\boldsymbol{n}$ étant la normale extérieure à S. En portant (22) dans (21) et puisque (21) est valable pour tout volume V, on obtient le système d'équations suivant :

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Le tenseur

$$\hat{T} = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix}$$

s'appelle *tenseur de contrainte* et les fonctions τ_{ik} ses *composantes*.

Définissons maintenant le sens mécanique des composantes du tenseur de contrainte. Par définition f_i est la projection sur l'axe x_i de la force $\boldsymbol{f}$ (exercée sur l'unité de surface S). En choisissant sur S un point en lequel la normale extérieure est dirigée le long de l'axe x_1, on déduit de (23) que

$$f_i = \tau_{i1}.$$

Donc τ_{i1} est la projection sur l'axe Ox_i de la force agissant sur l'unité de surface perpendiculairement à l'axe Ox_1 ; plus exactement τ_{11} est la composante normale de cette force, τ_{21} et τ_{31}, ses composantes tangentielles. La figure 2 illustre le sens mécanique des composantes du tenseur de contrainte.

Ecrivons maintenant les conditions de nullité des moments résultants par rapport aux axes de coordonnées. Le moment par rapport à l'axe Ox_1 est nul :

$$\iiint_V (x_2 F_3 - x_3 F_2)\, dV + \iint_S (x_2 f_3 - x_3 f_2)\, dS = 0. \tag{25}$$

En vertu de la formule (23), on a

$$\iint_S (x_2 f_3 - x_3 f_2)\, dS = \iint_S \{(x_2 \tau_{31} - x_3 \tau_{21}) \cos(\boldsymbol{n}, x_1) +$$
$$+ (x_2 \tau_{32} - x_3 \tau_{22}) \cos(\boldsymbol{n}, x_2) + (x_2 \tau_{33} - x_3 \tau_{23}) \cos(\boldsymbol{n}, x_1)\}\, dS,$$

ou en transformant la dernière intégrale par la formule d'Ostrogradski.

$$\iint_S (x_2 f_3 - x_3 f_2)\, dS = \iiint_V \operatorname{div}(x_2\tau_3 - x_3\tau_2)\, dV =$$

$$= \iiint_V \left\{ x_2 \left(\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right) - \right.$$

$$\left. - x_3 \left(\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \right) + \tau_{32} - \tau_{23} \right\} dV.$$

En portant cette expression dans (25) et compte tenu de (24) on obtient

$$\iiint_V (\tau_{32} - \tau_{23})\, dV = 0.$$

Le volume V étant arbitraire, il vient $\tau_{32} = \tau_{23}$. De façon analogue on établit que $\tau_{12} = \tau_{21}$, $\tau_{13} = \tau_{31}$.

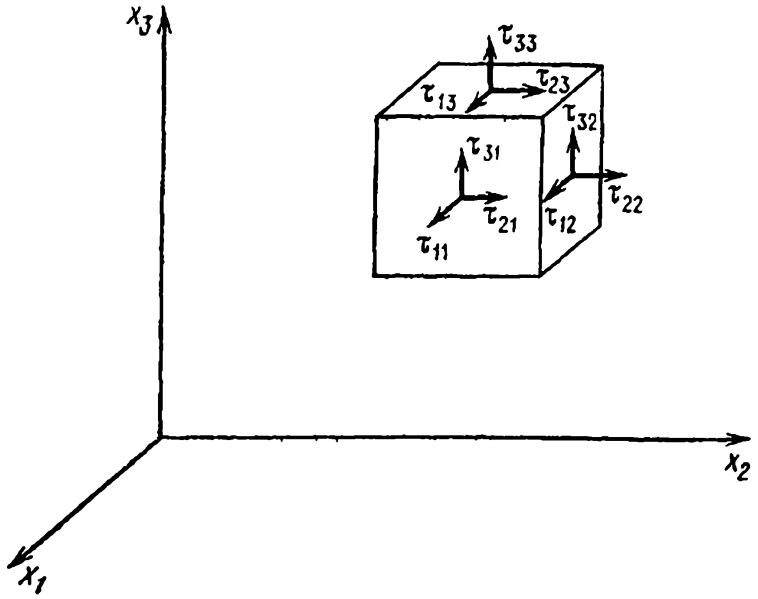


Fig. 2

Nous avons démontré que le tenseur de contrainte était symétrique et, par conséquent, le système (24) ne contient que six fonctions inconnues.

Pour obtenir un système d'équations pour la détermination du vecteur déplacement $\boldsymbol{u}$, introduisons le tenseur de déformation et établissons le lien existant entre les composantes des tenseurs de contrainte et de déformation.

Les distances entre les points d'un solide varient sous l'effet de déformations. Considérons deux points voisins quelconques. Soit

$x = (x_1, x_2, x_3)$ le rayon vecteur du premier et $x + \Delta x = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$ celui du second. Le vecteur déplacement du point x est $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, et du point $x + \Delta x$:

$$u(x + \Delta x) = (u_1(x + \Delta x), u_2(x + \Delta x), u_3(x + \Delta x)).$$

Le vecteur $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ caractérise le déplacement du vecteur Δx, et de plus

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^{3} \Delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + O(|\Delta x|^2), \tag{26}$$

quant au vecteur $\Delta x + \Delta u$ il caractérise la position respective de ces points après leur déplacement. Calculons le module du vecteur $\Delta x + \Delta u$:

$$|\Delta x + \Delta u|^2 = |\Delta x|^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} \Delta x_i \Delta u_i + |\Delta u|^2 =$$

$$= |\Delta x|^2 + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \Delta x_j + |\Delta u|^2 + O(|\Delta x|^3).$$

Plaçons-nous maintenant dans les conditions de la théorie linéaire de l'élasticité, i. e. supposons que le corps étudié se déforme peu et donc $\partial u_i / \partial x_j \ll 1$. Cette condition permet de négliger les carrés et les produits des dérivées $\partial u_i / \partial x_j$ par rapport à leurs premières puissances.

Si

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0, \tag{27}$$

alors à $O(|\Delta x|^3 + |\Delta u|^2)$ près le carré de la distance des points x et $x + \Delta x$ reste invariant après leur déplacement, i.e. dans ce cas on peut estimer qu'il n'y a pas de déformation.

Donc, sous les hypothèses faites les conditions (27) sont des conditions de déplacement sans déformation, i.e. un déplacement rigide.

Mettons l'expression (26) sous la forme

$$\Delta u_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \Delta x_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \Delta x_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) +$$

$$+ O(|\Delta x|^2), \quad i = 1, 2, 3.$$

De cette écriture il s'ensuit que le déplacement du vecteur Δx qui est caractérisé par le vecteur Δu est dû à $O(|\Delta x|^2)$ près au déplacement rigide et à une transformation de tenseur symétrique

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix},$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{28}$$

Ce tenseur s'appelle *tenseur de déformation*, les fonctions $\varepsilon_{ij}(x)$ sont ses *composantes*.

On montre que les composantes du tenseur de déformation admettent l'interprétation mécanique suivante: ε_{ii} est l'allongement relatif d'un segment initialement parallèle à l'axe Ox_i; $2\varepsilon_{ij}$ avec $i \neq j$ représente la réduction d'un angle initialement droit de deux vecteurs orientés dans le sens des axes Ox_i, Ox_j.

La *loi généralisée de Hooke* établit une relation entre les tenseurs de contrainte et de déformation: les composantes du tenseur de contrainte sont des fonctions linéaires homogènes des composantes du tenseur de déformation, i.e.:

$$\tau_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} C_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad ij = 1, 2, 3.$$

Le tenseur d'ordre 4 $C_{ij\alpha\beta}$ porte le nom de *tenseur des modules d'élasticité*. On sait qu'il jouit toujours des propriétés suivantes de symétrie:

$$C_{ij\alpha\beta} = C_{ji\alpha\beta} = C_{ij\beta\alpha} = C_{\alpha\beta ij},$$

i.e. seuls 21 des 81 paramètres ne sont pas égaux entre eux.

Dans le cas d'un solide isotrope, le nombre de paramètres distincts se réduit à deux. La *loi de Hooke* prend alors la forme

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \lambda \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{jj} + 2\mu\varepsilon_{ii}, \qquad i = 1, 2, 3, \\ \tau_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad i \neq j, \qquad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{29}$$

En portant (29) dans (24) et compte tenu de (28), on obtient le système suivant d'équations d'équilibre du solide élastique (système de Lamé) en les déplacements:

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)\right] + F_i = 0. \tag{30}$$

Si le solide est homogène, i.e. les coefficients de Lamé λ et μ ne dépendent pas de x, le système (30) s'écrit vectoriellement

$$\mu\Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} = 0.$$

Si de plus $F_3 = 0$ et $u_3 = 0$, et que F_1, F_2 et u_1, u_2 ne dépendent pas de x_3, on obtient le problème plan

$$\begin{aligned} &(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_1 = 0, \\ &(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + F_2 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Comme conditions aux limites pour le système (31) par exemple, on peut prendre les valeurs des composantes u_1 et u_2 du vecteur déplacement sur la frontière du domaine, i.e.

$$u_1 = g_1 \quad u_2 = g_2$$

ou encore les composantes du vecteur contrainte

$$\begin{aligned} &\tau_{11} \cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \tau_{12} \cos(\boldsymbol{n}, x_2) = f_1, \\ &\tau_{12} \cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \tau_{22} \cos(\boldsymbol{n}, x_2) = f_2, \end{aligned} \tag{32}$$

où τ_{ij} sont définis par les expressions (29), (28). On peut poser d'autres problèmes.

4. Equilibre d'une lame. Le deuxième exemple de problème de la théorie de l'élasticité que nous étudierons sera l'équation d'équilibre d'une lame mince. Par lame on entendra un corps élastique, limité par deux plans parallèles dont la distance est de beaucoup inférieure aux autres dimensions.

Considérons une lame isotrope homogène d'épaisseur h et disposons-la par rapport aux axes de coordonnées de telle sorte qu'elle admette le plan (x_1, x_2) pour plan médian. Supposons que la charge qui est exercée sur cette lame est normale à sa surface et appliquée, par exemple, à la surface supérieure, la surface inférieure étant libre.

Pour écrire l'équation de l'état déformé de la lame, on se servira des relations (24) introduites précédemment en supposant que $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, i.e. on supposera qu'il n'existe pas de forces volumiques.

Multiplions les deux premières expressions (24) par x_3, intégrons-les sur x_3 entre $-h/2$ et $h/2$ et transformons les derniers termes des premiers membres par une intégration par parties. Comme le tenseur de contrainte est symétrique et que la charge est par hypothèse orthogonale à la surface de la lame, i.e.

$$\begin{aligned} \tau_{13}(x_1, x_2, h/2) &= \tau_{13}(x_1, x_2, -h/2) = \\ &= \tau_{23}(x_1, x_2, h/2) = \tau_{23}(x_1, x_2, -h/2) = 0, \end{aligned}$$

on aura

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{h/2}^{h/2}\tau_{11}x_3\,dx_3+\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3\,dx_3-\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}\,dx_3=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3\,dx_3+\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{h/2}^{h/2}\tau_{22}x_3\,dx_3-\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}\,dx_3=0. \tag{33}$$

En intégrant la troisième équation (24) sur x_3 entre $-h/2$ et $h/2$ et comme le tenseur de contrainte est symétrique et la charge appliquée à la surface supérieure de la lame, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}\,dx_3+\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}\,dx_3+\tau_{33}(x_1,\ x_2,\ h/2)=0. \tag{34}$$

Introduisons les notations suivantes:

$$M_1=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{11}x_3\,dx_3,\qquad M_2=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{22}x_3\,dx_3,$$
$$M_{12}=-\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{12}x_3\,dx_3,\qquad q=\tau_{33}(x_1,\ x_2,\ h/2), \tag{35}$$
$$Q_1=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{13}\,dx_3,\qquad Q_2=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{23}\,dx_3.$$

Les fonctions $M_1(x_1,\ x_2)$ et $M_2(x_1,\ x_2)$ sont par définition les *moments de flexion*, $M_{12}(x_1,\ x_2)$, le *moment de torsion*, $Q_1(x_1,\ x_2)$ et $Q_2(x_1,\ x_2)$, les *forces de cisaillement*. Dans les nouvelles notations, les équations (33), (34) s'écrivent

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}-Q_1=0,$$
$$-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}-Q_2=0,$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+q=0.$$

En éliminant Q_1 et Q_2 on obtient une seule équation à trois inconnues

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}=-q. \tag{36}$$

Mais ces trois inconnues ne sont pas indépendantes. On peut s'en assurer en exprimant les moments M_1, M_2 et M_{12} au moyen de la fonction de flexion $w(x_1,\ x_2)\equiv u_3(x_1,\ x_2,\ 0)$. On supposera que

la flexion est petite en regard de l'épaisseur de la lame, et que la surface médiane (i.e. la surface qui coïncide avec la surface médiane après l'application de la charge) est neutre, i.e. ne subit ni extension ni contraction.

Exprimons les allongements relatifs $\varepsilon_{11}(x_1, x_2, x_3)$, $\varepsilon_{22}(x_1, x_2, x_3)$ et le déplacement relatif $\varepsilon_{12}(x_1, x_2, x_3)$ en fonction de w. Considérons l'élément de lame découpé par les plans $x_1 = \overset{\circ}{x}_1$, $x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + \Delta x_1$; $x_2 = \overset{\circ}{x}_2$, $x_2 = \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2$. On supposera qu'après la déformation de cet élément, ses surfaces latérales resteront planes. Considérons la section de l'élément déformé par un plan parallèle au plan Ox_1x_3. Cette section est représentée sur la figure 3.

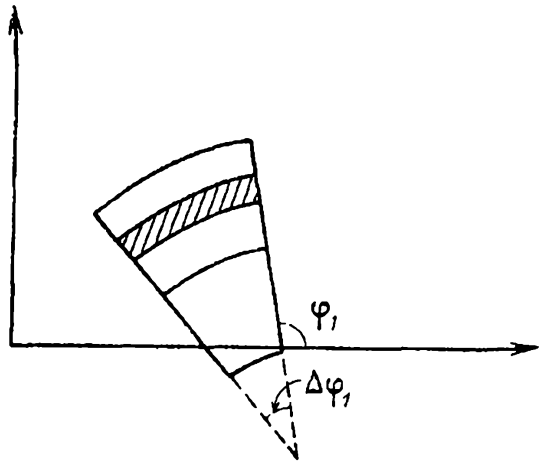


Fig. 3

Les flexions étant petites, on admet que les angles de rotation de la surface médiane le sont également. On peut donc les supposer égaux à leurs tangentes. On a

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\Delta x_1.$$

L'allongement relatif, dans la direction de l'axe Ox_1, de l'élément de lame situé à distance x_3 de la surface médiane est proportionnel à x_3, donc

$$\varepsilon_{11} = x_3 \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}. \tag{37}$$

De façon analogue on trouve

$$\varepsilon_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \tag{38}$$

Cherchons maintenant l'expression de ε_{12}. Les plans qui découpent l'élément de surface étudié subissent au cours de la déformation une rotation telle que le déplacement u_1 d'un point de la lame sera d'autant plus grand que ce point sera éloigné de la surface médiane

et que l'angle de rotation sera élevé. Plus exactement

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

On obtiendrait de même

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}.$$

En portant ces relations dans l'expression de ε_{12} il vient

$$\varepsilon_{12} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{39}$$

Pour déterminer les contraintes correspondant aux déformations données, on se servira de la loi de Hooke (29). Ceci étant, on supposera que la composante τ_{33} du tenseur de contrainte est négligeable devant τ_{11} et τ_{22}. On a

$$\tau_{11} = \frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{11} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{22},$$

$$\tau_{22} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{11} + \frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{22},$$

$$\tau_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}.$$

En passant des coefficients de Lamé λ et μ aux autres constantes élastiques: le module d'élongation (module de Young) E et le coefficient de Poisson ν, qui sont liés à λ et μ par les expressions

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

on aura

$$\tau_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \qquad \tau_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),$$

$$\tau_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}.$$

En portant ici les expressions (37), (38) et (39), puis les nouvelles expressions de τ_{ij} dans (35), on obtient les moments en fonction de w:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \qquad M_2 = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), \\ M_{12} &= D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \tag{40}$$

où $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ est le coefficient de rigidité cylindrique de la lame.

En portant enfin les formules (40) dans l'équation (36), on obtient l'équation en la fonction des flexions

$$\Delta_2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^2} = \frac{q}{D}. \tag{41}$$

S'agissant de l'équation (41), la façon la plus simple d'obtenir les conditions aux limites est d'étudier la variation de l'énergie de la lame. Sans nous arrêter sur la déduction de la formule de l'énergie, écrivons son expression dans le cas d'une lame carrée de côté unitaire :

$$W = \frac{D}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2. \tag{42}$$

En variant l'énergie (42) et en transformant l'expression obtenue par une intégration par parties, on obtient les variantes suivantes des conditions aux limites (pour $x_1 = 0$, par exemple) :

1) Conditions d'encastrement

$$w(0, x_2) = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_1}(0, x_2) = 0.$$

2) Conditions d'articulations

$$w(0, x_2) = 0, \quad D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = 0.$$

3) Conditions de bord libre

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad D \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = 0.$$

On peut écrire des conditions aux limites analogues sur les autres parties du bord de la lame. A remarquer seulement que si les conditions de bord libre sont données sur deux côtés adjacents de la lame, il faut connaître en plus la valeur du moment de torsion en l'angle de ces côtés.

Outre ces conditions aux limites, on peut donner des conditions d'une autre nature, mais nous ne nous arrêterons pas là-dessus.

§ 2. Considérations générales sur les équations elliptiques

1. Equations du second ordre. La forme générale d'une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes est

$$L(u) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} A_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x) u = f(x). \tag{1}$$

où $A_{\alpha\beta}$, B_α, C et f sont des fonctions réelles des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lesquelles variables peuvent être interprétées comme les coordonnées d'un point x d'un espace euclidien E_n de dimension n. On admettra par ailleurs que les fonctions $A_{\alpha\beta}$, B_α et C sont mesurables et bornées. L'équation (1) est par définition une

équation elliptique au point $\bar{x}$ si

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\,\xi_\alpha\xi_\beta \neq 0 \quad \text{pour } |\xi| \neq 0, \tag{2}$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont des réels quelconques, et $|\xi| = \left(\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha^2\right)^{1/2}$.

La condition d'ellipticité de (2) peut être écrite sous une forme légèrement différente. Le premier membre de l'inégalité (2) est une fonction continue de ξ_α, elle est donc de signe défini lorsque l'inégalité (2) est réalisée. En inversant au besoin les signes des coefficients $A_{\alpha\beta}$, au lieu de (2) on obtient la condition équivalente:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\,\xi_\alpha\xi_\beta > 0 \quad \text{pour } |\xi| \neq 0. \tag{3}$$

Sans perdre en généralité on peut supposer que $A_{\alpha\beta}(\bar{x}) = A_{\beta\alpha}(\bar{x})$. Donc l'inégalité (3) traduit le fait que la forme quadratique est définie positive. Mais pour les formes quadratiques définies positives on a l'inégalité

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(\bar{x})\,\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \nu(\bar{x}) \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2, \quad \nu(\bar{x}) > 0, \tag{4}$$

où $\nu(\bar{x})$ est la plus petite valeur propre de la matrice symétrique $\| A_{\alpha\beta} \|$. Donc dans la définition de l'ellipticité de l'équation (1), la condition (2) peut être remplacée par la condition (4).

Dans le plan, i.e. lorsque $n = 2$, la condition d'ellipticité (2), ou la condition que la forme quadratique (2) soit définie positive, peut être formulée comme suit

$$A_{12}^2(\bar{x}) = A_{21}^2(\bar{x}) < A_{11}(\bar{x})\,A_{22}(\bar{x}). \tag{5}$$

L'équation (1) est dite *elliptique dans le domaine* $D \in E_n$ si elle l'est en tout point de ce domaine.

L'équation (1) est dite *uniformément elliptique dans le domaine* $D \in E_n$, si dans la condition (4)

$$\inf_{x \in D} \nu(\bar{x}) = \nu > 0.$$

Dans ce cas au lieu de (4) on peut écrire

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x)\,\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \nu \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha^2, \quad \nu = \text{const} > 0,\ x \in D. \tag{6}$$

Comme équations elliptiques du second ordre citons:

l'équation de Laplace

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0,$$

l'équation de Poisson

$$-\Delta u = f(x),$$

l'équation sans dérivées mixtes

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x)u = f(x)$$

avec

$$A_{\alpha\alpha}(x) > 0.$$

2. Equations d'ordre supérieur. L'équation différentielle linéaire, aux dérivées partielles d'ordre $2m$, à n variables indépendantes

$$\sum_{k=0}^{2m} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}\ldots\partial x_{\alpha_k}} = f(x) \tag{7}$$

est *elliptique au point* $\bar{x}$ si

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}}(\bar{x})\,\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{2m}} \neq 0 \tag{8}$$

$$\text{pour } |\xi| \neq 0.$$

Elle est *elliptique dans un domaine* $D \in E_n$ si elle l'est en tout point de ce domaine.

De même que dans le cas d'une équation du second ordre, la condition d'ellipticité (8) peut s'écrire

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}=1}^{n} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}}(\bar{x})\,\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{2m}} \geqslant \nu(\bar{x})\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha^{2m}. \tag{9}$$

Un exemple important d'équation elliptique d'ordre supérieur est l'*équation polyharmonique*

$$(-\Delta)^m u = f(x),$$

où Δ^m désigne la $m^{ième}$ itération de l'opérateur de Laplace et se définit par les relations recurrentes

$$\Delta^1 u = \Delta u,\ \Delta^2 u = \Delta(\Delta u),\ \ldots,\ \Delta^m u = \Delta(\Delta^{m-1}u),\ m > 1.$$

Lorsque $m = n = 2$, on obtient une équation biharmonique sur le plan

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x).$$

Toute équation elliptique est d'ordre pair pour $n > 1$.

3. Systèmes d'équations. Soit un système d'équations différentielles aux dérivées partielles en p fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_p$, dépendant chacune de n variables, et soit m_j le plus grand ordre des

dérivées des fonctions u_j figurant dans ce système. On peut écrire ce système sous la forme

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(x)\frac{\partial^k u_j}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}\ldots\partial x_{\alpha_k}}=f_i(x), \qquad (10)$$

Considérons le déterminant d'ordre p dont l'élément situé à l'intersection de la i- ème ligne et de la j-ième colonne est

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m_j}=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_j}}\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{m_j}}.$$

Le système (10) est *elliptique au point* x si

$$\det\left|\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m_j}=1}^{n} A^{(i,j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_j}}(\bar{x})\,\xi_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_{m_j}}\right|\neq 0 \qquad (11)$$

$$\text{pour } |\xi|\neq 0.$$

Le système (10) est *elliptique* en un *domaine* $D\in E_n$ s'il l'est en tout point $\bar{x}\in D$.

Un exemple particulièrement important de système elliptique est le système d'équations de Lamé

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3}=-f_1,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+$$
$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}=-f_2,$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}+\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+$$
$$+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}=-f_3.$$

Ce système contient trois fonctions inconnues ($p=3$) dépendant de trois variables indépendantes ($n=3$) et seulement deux dérivées secondes ($m_j=2$). Le déterminant de la condition (11) vaut pour ce système

$$\begin{vmatrix}\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_1^2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3\\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & \mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3\\ (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 & \mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)\xi_3^2\end{vmatrix}=$$
$$=\mu^2(\lambda+2\mu)|\xi|^6.$$

Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, comme c'est le cas dans les problèmes pratiques, ce déterminant ne s'annule pas lorsque $|\xi| \neq 0$.

En dimension deux le système s'écrit

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial x_2}=-f_1,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}=-f_2,$$

le déterminant de la condition (11) est égal à $\mu(\lambda+2\mu)|\xi|^4$.

4. Solutions généralisées. Supposons que dans un domaine G d'un espace euclidien de dimension n est donnée une équation différentielle du second ordre

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x}{\partial x_\beta}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+C(x)\,u=f(x). \quad (12)$$

On appelle *solution généralisée de* $W_2^1(G)$ *de l'équation* (12) une fonction $u(x)$ appartenant à l'espace $W_2^1(G)$ et vérifiant l'identité intégrale

$$\int_G\left(-\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\eta+Cu\eta\right)dx=\int_G f\eta\,dx \quad (13)$$

quelle que soit la fonction $\eta(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

$W_2^1(G)$ est l'espace des fonctions appartenant à $L_2(G)$ avec leurs dérivées premières généralisées. L'espace $W_2^1(G)$ est muni de la norme

$$\|v\|_{W_2^1(G)}=\left\{\int_G\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2+u^2\right]dx\right\}^{1/2} \quad (14)$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ est un sous-espace de $W_2^1(G)$, adhérence relativement à la norme de $W_2^1(G)$ de l'ensemble des fonctions à support borné indéfiniment dérivables et à support dans G.

Supposons que pour l'équation (12) est donnée sur la frontière Γ de G la condition aux limites

$$u(x)=0, \quad x\in\Gamma. \quad (15)$$

On appelle *solution généralisée de* $W_2^1(G)$ *du problème* (12), (15) une fonction $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ qui vérifie l'identité intégrale (13) pour toute fonction $\eta(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

Supposons que pour l'équation (12) est donnée sur la frontière Γ la condition aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial N}\equiv\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\cos(n,x_\alpha)=0, \quad (16)$$

où n est la normale intérieure à Γ.

On appelle *solution généralisée de* $W_2^1(G)$ *du problème* (12), (16)

une fonction $u(x) \in W_2^1(G)$ vérifiant l'identité intégrale (13) quelle que soit $\eta(x) \in W_2^1(G)$.

De façon analogue on définit les solutions généralisées des équations d'ordre supérieur et de systèmes d'équations.

5. Formulation variationnelle des problèmes aux limites. De nombreux problèmes de physique mathématique se ramenant à des équations elliptiques admettent une formulation dite variationnelle outre la formulation principale qui est liée à la recherche de la solution. Cela veut dire qu'il existe une fonctionnelle minimisant l'élément qui coïncide avec la solution du problème étudié. Dans ce cas, au lieu de chercher telle ou telle solution de l'équation différentielle, on peut poser le problème de l'extrémum de la fonctionnelle correspondante.

Soit à trouver dans un domaine G d'un espace euclidien de dimension n la solution de l'équation

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) - C(x)\,u\Big) = f(x), \tag{17}$$

qui vérifie sur la frontière Γ du domaine G la condition homogène aux limites de première espèce

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{18}$$

On suppose que l'équation (17) est elliptique et la matrice $\{A_{\alpha\beta}(x)\}$, symétrique, i.e. $A_{\alpha\beta}(x) \equiv A_{\beta\alpha}(x)$. Le problème (17), (18) équivaut au problème variationnel suivant: on demande de trouver dans la classe des fonctions suffisamment de fois dérivables vérifiant la condition (18) celle qui minimise la fonctionnelle

$$I(u) \equiv \frac{1}{2}\int_G \Big[\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + C(x)\,u^2\Big]dx + \int_G f(x)\,u(x)\,dx. \tag{19}$$

Si dans le domaine G on demande de trouver la solution de l'équation (17) qui vérifie la condition aux limites de seconde espèce (16), le problème variationnel correspondant s'énonce comme suit: trouver dans la classe des fonctions suffisamment dérivables celle qui minimise la fonctionnelle (19). Dans les problèmes avec des conditions aux limites de seconde espèce, les fonctions parmi lesquelles est cherché l'élément minimisant ne sont soumises à aucune condition aux limites.

S'agissant du système de Lamé

$$\sum_{j=1}^{2}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\lambda\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_j}\mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\Big] + F_i = 0, \quad i = 1,\ 2,$$

avec les conditions aux limites de seconde espèce

$$\sum_{j=1}^{2} \tau_{ij} \cos(n, x_j) + f_i = 0, \quad i = 1, 2, \; x \in \Gamma$$

le problème variationnel s'énonce comme suit: dans la classe des fonctions vectorielles suffisamment différentiables, trouver celle qui minimise la fonctionnelle

$$I(u) \equiv W(u) - \int_G \sum_{i=1}^{2} F_i u_i \, dx - \int_\Gamma \sum_{i=1}^{2} f_i u_i \, ds,$$

où

$$W(u) \equiv \frac{1}{2} \int_G \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dx.$$

La fonctionnelle $W(u)$ est la fonctionnelle de l'énergie de déformation élastique.

Signalons enfin la formulation variationnelle du premier problème aux limites pour l'équation biharmonique de dimension deux. On cherche dans le domaine G la solution de l'équation

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in G, \tag{20}$$

qui vérifie sur la frontière Γ la condition aux limites de première espèce:

$$u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{21}$$

Voici la formulation variationnelle du problème (20), (21): dans la classe des fonctions suffisamment différentiables, vérifiant les conditions (21), trouver celle qui minimise la fonctionnelle

$$I(u) \equiv \frac{1}{2} \int_G \left\{ (\Delta u)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx -$$

$$- \int_G f(x) u \, dx. \tag{22}$$

Dans les problèmes relatifs à l'incurvation d'une lame ν désigne le coefficient de Poisson. Ici l'élément minimisant ne dépend pas de ν, donc pour simplifier la fonctionnelle $I(u)$ on peut poser $\nu = 1$.

Si les fonctions parmi lesquelles on cherche le minimum de la fonctionnelle (22) ne sont pas assujetties à vérifier les conditions aux limites (21), tout élément minimisant cette fonctionnelle sera solution de l'équation (20) avec les conditions aux limites de bord libre (cf. 4 § 1).

Voir aussi [8], [12], [5] et [10].

CHAPITRE II

MÉTHODES DE CONSTRUCTION DES SCHÉMAS DISCRETS

§ 1. Principe de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies ou des réseaux ou de discrétisation est aujourd'hui l'une des méthodes le plus couramment utilisée dans la résolution approchée de problèmes aux limites posés pour des équations différentielles aux dérivées partielles. Le principe en est le suivant. Le domaine de variation continue des arguments (par exemple, un intervalle fermé, un rectangle, etc.) est remplacé par un ensemble (discret) fini de points (les nœuds) appelé réseau; au lieu des fonctions à argument continu on étudie des fonctions à argument discret, définies aux nœuds du réseau, que nous appellerons fonctions discrètes. Les dérivées figurant dans l'équation différentielle et les conditions aux limites sont remplacées (approchées) par des formules discrètes, i. e. des combinaisons linéaires de valeurs prises par la fonction discrète en certains nœuds; le problème aux limites de l'équation différentielle se transforme en un système d'équations algébriques (schéma discret) linéaires (si le problème initial est linéaire).

Si le problème aux limites discret ainsi obtenu est soluble et sa solution tend (converge), lorsque le réseau est rendu plus fin, vers la solution du problème initial, cette solution est alors prise pour solution approchée du problème initial.

En dépit de son apparente simplicité cette méthode appelle les questions suivantes:

1. Comment faut-il choisir le réseau?
2. Comment écrire le schéma discret?

Quand on a répondu à ces questions il faut encore savoir:

3. Le degré d'approximation du problème par le schéma discret.
4. Si le système est stable et dans quel sens.
5. La vitesse de convergence de la solution du problème discret vers la solution du problème initial.

Le propos de ce livre est de traiter ces questions pour divers problèmes.

1. Réseaux et fonctions discrètes. Voyons des exemples simples de réseaux. Supposons que le domaine de variation de l'argument x est l'intervalle $[0, l]$. Partageons cet intervalle en N parties égales de

longueur $h = l/N$ chacune à l'aide des points $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$. L'ensemble des points $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, s'appelle *réseau régulier* sur l'intervalle $[0, l]$ et se note $\bar{\omega} = \{x_i = ih \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$, et le nombre h qui représente la distance des points (nœuds) du réseau $\bar{\omega}$, *pas du réseau*.

L'intervalle $[0, l]$ peut être partagé en N parties à l'aide des points arbitraires $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{N-1} < l$. On obtient alors le réseau $\bar{\omega} = \{x_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$ dont le pas $h_i = x_i - x_{i-1}$ dépend de l'indice i du nœud x_i. Si $h_i \neq h_{i+1}$ pour un i au moins, on dit alors que le réseau $\bar{\omega}$ est *irrégulier*. Si $h_i = \text{const} = h = l/N$ pour tous les $i = 1, 2, \ldots, N$, nous obtenons le réseau *régulier* construit plus haut.

Sur la droite $-\infty < x < \infty$ on peut considérer le réseau $\Omega = \{x + ih \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ constitué d'un nombre infini de nœuds et d'origine un point quelconque x.

Parfois on aura intérêt à construire des réseaux dont tous les pas sont égaux à l'exception du premier : exemple, le réseau

$$\bar{\omega} = \{x_i = ih + 0{,}5h \mid i = 0, 1, 2, \ldots, N, h = l/(N + 0{,}5)\}$$

sur l'intervalle $[0, l]$. Dans ce cas l'extrémité gauche $x = 0$ n'est pas nœud du réseau.

Supposons que le domaine de variation des arguments $x = (x_1, x_2)$ est le rectangle $D = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. Construisons sur l'intervalle $0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$ le réseau $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha \mid i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, N_\alpha\}$ de pas $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$. Appelons l'ensemble des nœuds $x = x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $i = (i_1, i_2)$ de coordonnées $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$ et $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$ *réseau tramant le rectangle* D et notons-le par $\bar{\omega} = \{x = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, N_\alpha; \alpha = 1, 2\}$. Ce réseau est régulier en x_1 et x_2. Si l'un au moins des réseaux $\bar{\omega}_\alpha$ est irrégulier, le réseau $\bar{\omega}$ l'est également. Si $h_1 = h_2$ le réseau est *carré*. Si $h_1 \neq h_2$, le réseau régulier $\bar{\omega}$ sera *rectangulaire*. Le réseau $\bar{\omega}$ est composé visiblement des points d'intersection des droites $x_1 = x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$, $i_1 = 0, 1, 2, \ldots, N_1$, et des droites $x_2 = x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$, $i_2 = 0, 1, 2, \ldots, N_2$.

La fonction $\varphi = \varphi(x_i)$ de l'argument discret x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ est appelée *fonction discrète* définie sur le réseau $\bar{\omega}$ (le réseau est lui-même défini sur l'intervalle $[0, l]$).

A toute fonction continue $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, l]$ on peut associer une fonction discrète φ_i définie sur le réseau $\bar{\omega}$ (projeter $f(x)$ sur le réseau $\bar{\omega}$) en supposant par exemple que $\varphi_i = f(x_i) \equiv f_i$, $\varphi_i = \frac{1}{h} \int\limits_{x_i - 1/2}^{x_i + 1/2} f(x)\, dx$, etc. La deuxième de ces projections peut

être opérée aussi bien pour des fonctions continues que pour des fonctions admettant des discontinuités de première espèce, voire même pour des fonctions simplement intégrables.

On remarquera qu'une fonction discrète, définie sur des réseaux distincts mais possédant des nœuds communs, ne prend pas forcément les mêmes valeurs aux nœuds communs. Plus exactement, supposons donnés une fonction discrète $\varphi^h(x)$ et deux réseaux, l'un de pas $h = h_1$, l'autre de pas $h = h_2$, tels que $h_1 \neq h_2$. Désignons ces réseaux respectivement par ω^{h_1} et ω^{h_2}. D'une façon générale $\varphi^{h_1}(x) \neq \varphi^{h_2}(x)$ pour $x \in \omega^{h_1}$ et $x \in \omega^{h_2}$. Un exemple simple de telles fonctions est la fonction discrète $\varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} f(x)\,dx$, où $f(x)$ est une fonction d'argument continu.

2. Approximation d'opérateurs différentiels élémentaires. Erreur d'approximation. On appelle *opérateur aux différences ou discret* tout opérateur L_h envoyant une fonction discrète y dans une fonction discrète $Y = L_h y$. Un opérateur différentiel L, défini dans la classe des fonctions d'argument continu peut être approché par un opérateur discret L_h, défini sur des fonctions discrètes. Pour cela chaque dérivée est remplacée par une formule discrète contenant les valeurs de la fonction discrète en plusieurs nœuds du réseau. L'ensemble des nœuds utilisés pour la description de l'opérateur discret s'appelle le *stencil* de cet opérateur.

Voyons comment approcher les dérivées premières et secondes d'une fonction d'une variable.

Soit $\Omega = \{\bar{x} + ih \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ un réseau régulier de pas h sur la droite $-\infty < x < \infty$. Considérons la dérivée première $Lv \equiv v'$ d'une fonction $v(x)$. On peut lui substituer plusieurs formules discrètes. Par exemple, *les différences régressives*

$$Lv \sim \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \equiv L_h^- v_i,$$

les différences progressives

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \equiv L_h^+ v_i,$$

les différences centrales

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} \equiv L_h^0 v_i.$$

Ici $v_i = v(x_i)$ et le symbole $\sim$ désigne la correspondance ou l'approximation.

En remplaçant Lv par les différences $L_h v$ on admet l'erreur $L_h v_i - (Lv)_i = \psi_i$, appelée *erreur d'approximation* de l'opérateur L par l'opérateur discret L_h. Il est naturel d'exiger que cette erreur tende avec h vers zéro. Pour évaluer ψ_i il faut supposer que $v(x)$

est une fonction différentiable. Supposons que $v(x) \in C^{(m)}$, où $m \geqslant 2$. Développons $v(x)$ en série de Taylor au voisinage du point $x = x_i$:

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm hv_i' + O(h^2)$$

et calculons

$$\psi_i^- = L_h^- v_i - v_i' = O(h), \quad \psi_i^+ = L_h^+ v_i - v_i' = O(h).$$

D'où il résulte que $\psi_i^\pm \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Soient L un opérateur différentiel, L_h un opérateur discret sur un réseau Ω, où h est un paramètre caractérisant la finesse du réseau. On dit que l'opérateur discret L_h

1) *approche* l'opérateur différentiel L au nœud $x_i \in \Omega$, si $\psi_i = L_h v_i - (Lv)_i$, où $v(x)$ est une fonction suffisamment différentiable qui tend vers 0 avec h ;

2) *approche L avec un ordre n* ($n > 0$) au nœud $x_i \in \Omega$ si $\psi_i = O(h^n)$.

L'examen des formules de $L_h^\pm$ nous montre que $L_h^- v_i$ et $L_h^+ v_i$ approchent $L_v = v'$ avec un ordre un pour $v \in C^{(m)}$, où $m \geqslant 2$. L'accroissement de m ne modifie pas l'ordre d'approximation.

Considérons maintenant l'opérateur L_h^0. On montre sans peine que $L_h^0 v_i$ approche $v'(x)$ avec un ordre deux pour $v(x) \in C^{(m)}$, $m \geqslant 3$.

Dans la suite on se servira des notations

$$v_{\bar{x},i} \equiv (v_i - v_{i-1})/h, \quad v_{x,i} \equiv (v_{i+1} - v_i)/h,$$

$$v_{\overset{0}{x},i} \equiv (v_{i+1} - v_{i-1})/(2h) = \frac{1}{2}(v_{x,i} + v_{\bar{x},i}).$$

Dans les cas où l'indice i du nœud importera peu on l'omettra et l'on écrira simplement $v_{\bar{x}}$, v_x, $v_{\overset{0}{x}}$.

Considérons maintenant la dérivée seconde $Lv \equiv v''$. Il est évident qu'elle ne peut être approchée sur un stencil de deux points. Choisissons un *stencil de trois points* composé des nœuds x_{i-1}, x_i, x_{i+1} et considérons l'opérateur discret

$$L_h v_i \equiv v_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(v_{x,i} - v_{\bar{x},i}) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}.$$

Si $v(x) \in C^{(m)}$, $m \geqslant 4$, on peut écrire que

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm hv_i' + \frac{h^2}{2}v_i'' \pm \frac{h^3}{6}v_i''' + O(h^4).$$

D'où il résulte (on omet l'indice i)

$$v_{\bar{x}x} - v'' = O(h^2),$$

i.e. $v_{\bar{x}x}$ est une approximation d'ordre deux de v''.

A noter que l'ordre d'approximation de l'opérateur discret L_h dépend effectivement de l'ordre m de différentiabilité de la fonction

$v(x)$. En fait, partout il a été question de l'ordre maximal d'approximation qui ne varie pas lorsque l'indice m de la classe $C^{(m)}$ croît, en supposant que $v(x)$ était une fonction quelconque de $C^{(m)}$.

Voyons le cas plus complexe de l'opérateur

$$Lu \equiv \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

où $u \equiv u(x_1, x_2)$ est une fonction de deux arguments, x_1 et x_2, parcourant le plan Ox_1x_2. Introduisons le réseau

$$\Omega = \{x_i = x_{i_1 i_2} = (x_1^{(i_2)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha + i_\alpha h_\alpha,$$
$$i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha = 1, 2\},$$

et faisons le changement

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}) - 2u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) + u(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)})}{h_1^2} = u_{\bar{x}_1 x_1, i},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|_{x=x_i} \sim \frac{u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}) - 2u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) + u(x_1^{(i_1)}, x^{(i_2+1)})}{h_2^2} = u_{\bar{x}_2 x_2, i}.$$

On obtient ainsi l'opérateur discret $L_h u_i = (u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2})_i$. Cet opérateur est défini sur le stencil des cinq points $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)})$, $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)})$. Comme

$$u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2 + O(h_\alpha^2), \quad \alpha = 1, 2,$$

l'opérateur L_h admet une approximation du deuxième ordre en h_1 et h_2 :

$$\psi(x_i) = L_h u_{i_1, i_2} - (Lu)_{i_1 i_2} = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Jusqu'ici nous avons évalué la grandeur de l'erreur d'approximation $\psi = L_h v - Lv$ en un nœud isolé $x_i \in \Omega$. Si l'opérateur L_h approche l'opérateur L en tous les nœuds $x_i \in \Omega$, on dit que L_h *approche L sur le réseau* Ω. Dans ce cas, pour évaluer l'erreur d'approximation il est plus commode de se servir de la norme

$$\|\psi\|_C = \max_{x \in \Omega} |\psi(x)|. \tag{1}$$

Pour évaluer la fonction discrète ψ on peut utiliser d'autres normes, par exemple

$$\|\psi\|_{L_1} = \sum_{x \in \Omega} H |\psi(x)|, \quad \|\psi\|_{L_2} = \Big(\sum_{x \in \Omega} H \psi^2(x)\Big)^{1/2}, \tag{2}$$

où $H = h$ en dimension un et $H = h_1 h_2$ en dimension deux.

Supposons que $\|\psi\|$ est une norme pour les fonctions $\psi(x)$ définies sur le réseau Ω. Dans la suite on dira que l'opérateur dis-

cret L_h 1) *approche* l'opérateur différentiel L *relativement à la norme* $\|\cdot\|$ si $\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| \to 0$ lorsque $h \to 0$; 2) *approche* L *avec un ordre* $n > 0$ (L_h possède une approximation d'ordre n) si $\|\psi\| = O(h^n)$, ou $\|\psi\| \leqslant Mh^n$, où $M = \text{const} > 0$ ne dépendant pas de h.

Si v est une fonction suffisamment différentiable et Ω un réseau régulier, tous les opérateurs discrets considérés plus haut possèdent le même ordre d'approximation dans n'importe laquelle des normes (1), (2).

Il en va tout autrement dans le cas d'un réseau irrégulier. Soit

$$\bar{\omega} = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$$

un réseau irrégulier de pas $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Envisageons l'opérateur $Lv = v''$. Associons-lui l'opérateur discret

$$L_h v_i = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right], \quad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}), \tag{3}$$

défini sur le stencil (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).

Calculons l'erreur d'approximation

$$\psi_i = L_h v_i - (Lv)_i.$$

En supposant que $v(x) \in C^{(4)}[0, 1]$ et en utilisant les développements de Taylor

$$v_{i+1} = v_i + h_{i+1} v_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2} v_i'' + \frac{h_{i+1}^3}{6} v_i''' + O(h_{i+1}^4),$$

$$v_{i-1} = v_i - h_i v_i' + \frac{h_i^2}{2} v_i'' - \frac{h_i^3}{6} v_i''' + O(h_i^4)$$

on déduit

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(h_{i+1}^2) + O(h_i^2) = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(\hbar_i^2).$$

Il est évident que $\|\psi\|_C = O(h_0)$, $\|\psi\|_{L_1} = O(h_0)$, $\|\psi\|_{L_2} = O(h_0)$, $h_0 = \max\limits_{\bar{\omega}} h_i$. Donc, L_h possède un premier ordre d'approximation dans les normes $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_{L_1}$, $\|\cdot\|_{L_2}$.

Montrons que si la norme est dûment choisie, plus exactement si

$$\|\psi\| = \Big[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \Big(\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k\Big)^2\Big]^{1/2}, \tag{4}$$

l'opérateur (3) aura un deuxième ordre d'approximation :

$$\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| = O(h_0^2).$$

Comme $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$, alors

$$(h_{i+1} - h_i) v_i''' = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2(h_i + h_{i+1})} v_i''' + O(\hbar_i^2) =$$
$$= \frac{1}{h_i}(h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i''') + O(\hbar_i^2),$$

et ψ_i peut s'écrire

$$\psi_i = \overset{\circ}{\psi}_i + \psi_i^*,$$

où

$$\overset{\circ}{\psi}_i = \frac{1}{\hbar_i}(\eta_{i+1} - \eta_i) = \eta_{\hat{x},i}, \quad \eta_i = \frac{1}{6} h_i^2 v_i''' - O(h_i^2), \quad \psi_i^* = O(\hbar_i^2).$$

En calculant $\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \overset{\circ}{\psi}_k = \sum_{k=1}^{i} (\eta_{k+1} - \eta_k) = \eta_{i+1} - \eta_1$ et puisque $\|\eta\| = O(h_0^2)$ il vient $\|\overset{\circ}{\psi}\| = O(h_0^2)$. D'où il s'ensuit que $\|\psi\| \leqslant \|\overset{\circ}{\psi}\| + \|\psi^*\| \leqslant M h_0^2$, où $M = \text{const} > 0$ ne dépend pas du réseau, i.e. l'opérateur L_h défini par la formule (3) possède un deuxième ordre d'approximation dans la norme $\|\cdot\|$ (4) sur tout réseau irrégulier $\overline{\omega}$.

Ce résultat est valable également pour les normes

$$\|\psi\| = \Big[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \Big(\sum_{k=i}^{N-1} \hbar_k \psi_k\Big)^2\Big]^{1/2}, \quad \|\psi\| = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \Big|\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k\Big|.$$

On remarquera que $\|\psi\| \leqslant \|\psi\|_{L_1} \leqslant \|\psi\|_{L_2} \leqslant \|\psi\|_C$. Les inégalités inverses n'ont pas lieu pour des fonctions discrètes arbitraires.

Dans la suite on se servira des notations suivantes pour les différences sur un réseau irrégulier

$$v_{\bar{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{x,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, \quad v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\hbar_i},$$
$$v_{\bar{x}\hat{x},i} = \frac{1}{\hbar_i}(v_{x,i} - v_{\bar{x},i}) = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right).$$

3. Position des problèmes discrets. Approximation et convergence. Jusqu'ici nous nous sommes occupés de l'approximation d'opérateurs différentiels simples par des opérateurs discrets. D'ordinaire on demande d'intégrer l'équation différentielle $Lu = -f(x)$ moyennant des conditions subsidiaires (par exemple des conditions aux limites). Donc, outre la construction de l'opérateur discret, il importe d'approximer sur un réseau le second membre de l'équation différentielle ainsi que les conditions subsidiaires, et ensuite poser le problème discret, i.e. former un système d'équations (algébriques) discrètes.

Voyons quelques positions de problèmes discrets.

Exemple 1. Au problème aux limites pour l'équation différentielle du deuxième ordre

$$Lu = u'' = -f(x),\ 0 < x < 1,\ u(0) = g_0,\ u(1) = g_1 \tag{5}$$

on associe sur un réseau régulier $\overline{\omega}$ les problèmes aux limites discrets

$$\begin{gathered}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = -\varphi_i h^2,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\\ y_0 = g_0,\ y_N = g_1,\end{gathered} \tag{6}$$

où $\varphi_i = f(x_i)$,

$$\begin{gathered}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = -\overline{\varphi}_i h^2,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\\ y_0 = g_0,\ y_N = g_1,\end{gathered} \tag{7}$$

où $\overline{\varphi}_i = f(x_i) + \frac{h^2}{12} f''(x_i)$.

Exemple 2. Au problème aux limites

$$u'' = -f(x),\ 0 < x < 1,\ u'(0) = \varkappa u(0) - g_0,\ u(1) = g_1 \tag{8}$$

sont associés sur un réseau régulier $\overline{\omega}$ les deux problèmes discrets

$$\begin{gathered}\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = -\varphi_i,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\\ \frac{1}{h}(y_1 - y_0) = \varkappa y_0 - g_0,\ y_N = g_1,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = -\varphi_i,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\\ \frac{1}{h}(y_1 - y_0) = \varkappa y_0 - \left(g_0 + \frac{h}{2} f(0)\right),\quad y_N = g_1.\end{gathered} \tag{10}$$

Pour l'instant laissons de côté la solubilité des problèmes (6), (7), (9), (10) et occupons-nous de l'erreur d'approximation de ces problèmes. L'opérateur discret

$$\widetilde{\Lambda} y_i \equiv y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \tag{11}$$

(cf. (6), (7)), n'approxime pas l'opérateur différentiel $Lu = \frac{d^2u}{dx^2}$ car

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_i - \widetilde{\Lambda} v_i = O(1).$$

Le second membre (6) n'approxime pas non plus le second membre de (5). Ce qui n'empêche que l'équation différentielle (5) est approximée par l'équation discrète (6), puisque dans (6) nous avons affaire à une équation dont le sens n'est pas modifié après la multiplication par une fonction quelconque. En multipliant (6) par $1/h^2$ on obtient au premier membre l'approximation de l'opérateur d^2/dx^2, et au second, celle du second membre de (5). Nous avons vu au 2 que l'opérateur discret $\Lambda_h = h^{-2}\widetilde{\Lambda}$ approximait

l'opérateur différentiel d^2/dx^2 au deuxième ordre sur toute fonction $v(x) \in C^{(4)}$. Le second membre de (5) est approximé exactement. Si donc l'on avait défini l'erreur d'approximation de l'équation discrète au moyen de l'expression

$$\psi(x) = L_h v + \varphi - (Lv + f), \quad x \in \omega \tag{12}$$

où $v(x)$ est une fonction quelconque suffisamment différentiable, on aurait obtenu $\psi(x) = O(h^2)$.

Après multiplication par h^{-2}, l'équation discrète (7) aurait eu une erreur d'approximation $O(h^2)$ au sens défini. Or on a vu au **2** que l'ordre d'approximation d'un opérateur dépendait essentiellement de la différentiabilité de la fonction sur laquelle a lieu la vérification. Donc, si dans (12) la fonction $v(x)$ est différentiable un nombre de fois moindre que dans $C^{(4)}$, alors l'erreur d'approximation de l'équation (6) sera supérieure à $O(h^2)$. Pour cette raison $v(x)$ doit être supposée autant de fois différentiable que la solution du problème approximé (5). Bien plus dans l'approximation du problème (5), nous devons davantage nous soucier de l'écart entre la solution approchée du problème (6) et la solution du problème (5) que de l'erreur d'approximation du schéma quoique ces questions soient étroitement liées.

Soit la fonction $z(x) = y(x) - u(x)$, où $y(x)$ est solution du problème (6) et $u(x)$ solution du problème (5) sur le réseau ω. Composons l'équation à laquelle devra satisfaire la fonction discrète $z(x)$. En portant $y(x) = z(x) + u(x)$ dans (6) on obtient

$$z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1} = -h^2\varphi_i - (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}). \tag{13}$$

Multipliant (13) par h^{-2}, il vient

$$L_h z = -(\varphi + L_h u), \text{ où } L_h z = z_{\bar{x}x}. \tag{14}$$

Comparons la parenthèse du second membre de (14) avec la définition de l'erreur d'approximation (12). Cette comparaison fait apparaître que la parenthèse de (14) coïncide avec la fonction $\psi(x)$ de (12) si pour fonction $v(x)$ de (12) on prend la solution du problème initial (5). Si l'on prend la parenthèse (14) pour définition de l'erreur d'approximation, on est automatiquement dispensé de considérer la différentiabilité de la fonction $v(x)$ dans la définition de $\psi(x)$.

Soit donc l'équation différentielle

$$Lu = -f(x), \tag{15}$$

qui est sur le réseau Ω approximisée par l'équation discrète

$$L_h y = \varphi(x). \tag{16}$$

Considérons le résidu $\psi(x) = L_h u + \varphi(x)$, $x \in \Omega$, où u est solution de l'équation (15).

On dira que la fonction $\psi(x)$ est l'*erreur d'approximation de l'équation* (15) par l'équation discrète (16) si l'opérateur discret L_h approxime l'opérateur différentiel L sur des fonctions suffisamment différentiables.

Dans la suite on dira que l'équation discrète (16) :

1) *approxime l'équation différentielle* (15) *dans la norme* $\|\cdot\|$ si $\|\psi\| = \|L_h u + \varphi\| \to 0$ lorsque $h \to 0$,

2) *approxime l'équation différentielle avec l'ordre* n $(n > 0)$ si $\|\psi\| = O(h^n)$ ou $\|\psi\| \leqslant Mh^n$, où $M = \text{const} > 0$ ne dépend pas de h.

Servons-nous de la nouvelle définition de l'erreur d'approximation des schémas discrets pour vérifier l'ordre d'erreur des schémas (6) et (7) dans l'hypothèse que la solution de l'équation (5) soit suffisamment différentiable.

Pour le schéma (6)

$$\psi = L_h u + \varphi = u_{\bar{x}x} + f = u'' + \frac{h^2}{12} u^{\mathrm{IV}} + f + O(h^4) = O(h^2).$$

Pour le schéma (7)

$$\psi = L_h u + \bar{\varphi} = u_{\bar{x}x} + f + \frac{h^2}{12} f'' = u'' + \frac{h^2}{12} u^{\mathrm{IV}} +$$

$$+ f + \frac{h^2}{12} f'' + O(h^4) = (u'' + f) + \frac{h^2}{12}(u'' + f)'' + O(h^4) = O(h^4),$$

puisque $u'' + f(x) = 0$.

Donc, si la solution du problème (5) est $u(x) \in C^{(4)}$, l'erreur d'approximation du schéma (6) est $O(h^2)$, si c'est $u(x) \in C^{(6)}$, alors l'erreur d'approximation du schéma (7) est $O(h^4)$. L'accroissement de l'ordre d'approximation du schéma (7) par rapport au schéma (6) tient au fait que nous étudions l'erreur d'approximation sur une solution du problème (5) et non sur une fonction arbitraire $v(x)$.

De toute évidence, les erreurs d'approximation des problèmes (6) et (7) seront globalement (compte tenu des erreurs d'approximation des conditions aux limites) les mêmes, car les conditions aux limites sont exactement approchées.

Calculons l'erreur d'approximation du problème (8) par les problèmes (9) et (10). Il est clair que les erreurs d'approximation des équations de (9) et (10) seront les quantités $O(h^2)$, puisqu'elles ne diffèrent pas de l'approximation dans le problème (6). Etudions l'erreur d'approximation de la condition aux limites au point $x = 0$.

Pour le schéma (9)

$$\psi_\gamma = u_{x,0} - \varkappa u_0 + g_0 = u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 + O(h^2) = O(h).$$

Pour le schéma (10)

$$\psi_\gamma = u_{x,0} - \varkappa u_0 + \left(g_0 + \frac{h}{2} f(0)\right) = u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 +$$
$$+ \frac{h}{2} f(0) + O(h^2) = (u'(0) - \varkappa u(0) + g_0) +$$
$$+ \frac{h}{2} (u''(0) + f(0)) + O(h^2) = O(h^2)$$

puisque

$$u'(0) = \varkappa u(0) - g_0, \quad u'' + f = 0.$$

Ce nouvel accroissement de l'ordre d'approximation provient du fait que nous approximons la condition aux limites sur une solution du problème (8).

L'un des plus importants problèmes de la théorie des schémas discrets concerne, rappelons-le, la vitesse de convergence de la solution du problème discret vers la solution du problème initial.

Soit à intégrer l'équation différentielle avec la condition aux limites

$$Lu = -f(x), \; lu = -g(x). \tag{17}$$

Le problème (17) est approché sur un réseau $\bar{\omega}$ par le problème discret

$$L_h y = -\varphi(x), \; x \in \omega, \; l_h y = \nu(x), \; x \in \gamma, \tag{18}$$

où ω est l'ensemble des nœuds intérieurs du réseau $\bar{\omega}$ et γ, l'ensemble des nœuds frontière, $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$. On dira que la solution du problème discret (18):

1) *converge* vers la solution du problème initial sur le réseau ω au sens de la norme $\| \cdot \|_{(1_h)}$ si $\| y - u \|_{(1_h)} \to 0$ lorsque $h \to 0$;

2) *converge* vers la solution du problème initial au sens de la norme $\| \cdot \|_{1(h)}$ *à la vitesse* $O(h^n)$, $n > 0$ si $\| y - u \|_{(1_h)} = O(h^n)$ (ou $\| y - u \|_{(1_h)} \leqslant Mh^n$, où M est une constante positive ne dépendant pas de h).

4. Stabilité des schémas discrets. Nous avons introduit plus haut les notions d'approximation et de convergence d'un schéma. On rappelle que l'on étudie l'erreur d'approximation non pas sur un réseau fixe, mais sur une suite de réseaux $\{\omega_h\}$. Aussi considérera-t-on que partout il a été question non pas de la solution d'un problème discret isolé, mais d'une suite de solutions $\{y^h\}$ d'un problème discret dépendant du choix des réseaux. Ici h est un paramètre caractérisant le réseau. Si le réseau est unidimensionnel et régulier, h est un nombre (le pas du réseau). En général, h est un vecteur de norme $|h| > 0$.

Pour étudier la convergence du schéma, il faut étudier celle de la suite $\{z^h = y^h - u^h\}$ lorsque $|h| \to 0$, où u^h est la projection de

la solution analytique $u = u(x)$ du problème initial sur l'espace des fonctions discrètes définies sur le réseau ω_h. Voyons maintenant la stabilité qui est une notion fondamentale en théorie des schémas discrets.

Soit donné le schéma

$$L_h y^h = -\varphi^h(x), \quad l_h y^h = -\nu^h(x)$$

et soit

$$\psi^h = L_h u^h + \varphi^h, \quad \psi_\gamma^h = l_h u^h + \nu^h,$$

son erreur d'approximation. En supposant que $u = u(x)$ est suffisamment de fois dérivables, on peut obtenir le développement asymptotique de ψ^h et ψ_γ^h par rapport à $|h|$. Cependant la connaissance de l'ordre d'approximation ne suffit pour juger de la qualité du schéma. Il est nécessaire d'en évaluer la précision, i.e. l'ordre d'erreur $z^h = y^h - u^h$. On obtient cette évaluation si le schéma est stable.

Définissons la stabilité du schéma.

Soient y_1^h et y_2^h les solutions des problèmes (18) avec les seconds membres φ_1^h, ν_1^h et φ_2^h, ν_2^h respectivement. Le schéma (18) est *stable* si existent des constantes positives M_1, M_2 et h_0, ne dépendant pas du réseau ω_h (du paramètre vectoriel h) et du choix des seconds membres, telles que pour $|h| \leqslant h_0$ l'on ait

$$\| y_2^h - y_1^h \|_{(1_h)} \leqslant M_1 \| \varphi_2^h - \varphi_1^h \|_{(2h)} + M_2 \| \nu_2^h - \nu_1^h \|_{(3_h)}, \tag{19}$$

où $\| \cdot \|_{(1_h)}$, $\| \cdot \|_{(2_h)}$, $\| \cdot \|_{(3_h)}$ sont des normes sur l'ensemble des fonctions discrètes définies sur le réseau ω_h. La stabilité du schéma discret signifie que la solution $\{y^h\}$ du problème (18) est uniforme en h et dépend continûment des seconds membres (les données d'entrée) $\{\varphi^h, \nu^h\}$ et partant une faible variation des données d'entrée entraîne une faible variation de la solution.

Si le schéma (18) est soluble quels que soient les seconds membres admissibles (les données d'entrée) $\{\varphi^h, \nu^h\}$ et stable, on dit que le problème discret (18) est *correctement* posé ou encore que le schéma (18) est correct. Si le schéma est correct il possède une solution unique. En effet, supposons que le problème (18) admet deux solutions y_1^h et y_2^h correspondant aux mêmes données d'entrée $\{\varphi^h, \nu^h\}$, de sorte que $\varphi_1^h = \varphi_2^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu_2^h = \nu^h$. De (19) il vient alors

$$\| y_2^h - y_1^h \|_{(1_h)} \leqslant M_1 \| 0 \|_{(2_h)} + M_2 \| 0 \|_{(3_h)} = 0, \text{ i. e. } y_1^h \equiv y_2^h.$$

En définissant la stabilité (19) on n'a pas supposé la linéarité des équations (18). Supposons que le schéma (18) est linéaire. Alors $y^h \equiv 0$ est solution du problème pour $\varphi^h = \nu^h \equiv 0$. En faisant $y_1^h = y^h$, $\varphi_1^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu^h$ et $y_2^h = \varphi_2^h = \nu_2^h = 0$ dans (19), on constate que la stabilité du schéma linéaire implique la réalisation de la majoration a priori

$$\| y^h \|_{(1h)} \leqslant M_1 \| \varphi^h \|_{(2_h)} + M_2 \| \nu^h \|_{(3_h)}. \tag{20}$$

Dans cet ouvrage nous n'envisagerons que des schémas linéaires. L'étude de la stabilité du schéma discret (18) se ramène pratiquement à l'établissement d'une majoration a priori du type (20).

Si le schéma est stable, on obtient sans peine la majoration de l'erreur

$$z^h(x) = y^h(x) - u^h(x),$$

où $y^h(x)$ est solution du problème (18) et $u = u(x)$ solution du problème initial (17), en fonction de l'erreur d'approximation

$$\psi^h(x) = L_h u^h + \varphi^h, \ x \in \omega_h; \ \psi_\gamma^h = l_h u^h + \nu^h, \ x \in \gamma_h.$$

En effet, la solution $u = u(x)$ vérifie les conditions

$$L_h u^h = -(\varphi^h + \psi^h), \ l_h u^h = -(\nu^h - \psi_\gamma^h).$$

Posant ensuite $y_1^h = y^h$, $\varphi_1^h = \varphi^h$, $\nu_1^h = \nu^h$, $y_2^h = u^h$, $\varphi_2^h = \varphi^h - \psi^h$, $\nu_2^h = \nu^h - \psi_\gamma^h$ et utilisant la majoration (19) qui exprime la stabilité du schéma (18), on obtient

$$\| y^h - u^h \|_{(1_h)} \leqslant M_1 \| \psi^h \|_{(2_h)} + M_2 \| \psi_\gamma^h \|_{(3_h)}. \tag{21}$$

Si le schéma est linéaire, pour l'erreur z^h on obtient le problème

$$L_h z^h = -\psi^h, \ x \in \omega, \ l_h z^h = -\psi_\gamma^h, \ x \in \gamma,$$

identique au problème (18) ; on peut utiliser immédiatement la majoration (19) et déduire (21).

De la majoration (21) il s'ensuit que si le schéma (18) est stable et approche le problème (17), il est alors convergent lorsque $|h| \to 0$. En effet, $\| y^h - u^h \|_{(1_h)} \to 0$ lorsque $h \to 0$ si $\| \psi^h \|_{(2_h)} \to 0$ et $\| \psi_\gamma^h \|_{(3)_h} \to 0$ lorsque $|h| \to 0$.

La majoration (21) entraîne que l'ordre de précision du schéma (18) est défini par l'ordre d'approximation. Pour que le schéma converge, pour fixer les idées à la vitesse $O(|h|^m)$, $m > 0$ (admette la précision $O|h|^m$), il suffit qu'il possède (sur la solution $u = u(x)$ du problème (17)) une approximation qui soit du même ordre i.e.

$$\| \psi^h \|_{(2_h)} = O(|h|^m), \ \| \psi_\gamma^h \|_{(3_h)} = O(|h|^m).$$

La démonstration de la stabilité des schémas se ramène à l'établissement de majoration a priori (19) ou (20). Aux chapitres III, V et VI on établira des majorations de ce type avec des normes différentes $\| \cdot \|_{(\alpha, h)}$, $\alpha = 1, 2, 3$ pour des schémas discrets approximant des équations elliptiques du second et du quatrième ordre. Ainsi, au chapitre III, on étudiera la stabilité au moyen du principe du maximum et les majorations a priori renfermeront les normes discrètes sur C :

$$\| y^h \|_{(1_h)} = \max_{x \in \omega_h} | y^h(x) |, \quad \| \nu^h \|_{(3_h)} = \max_{x \in \gamma} | \nu^h(x) |, \quad \| \varphi^h \|_{(2_h)} = \| \varphi^h \|_{(1_h)}.$$

§ 2. Principes de construction des schémas discrets

1. Critères régissant les schémas discrets. Au paragraphe précédent nous avons cité des exemples d'approximations discrètes pour des opérateurs différentiels du premier et du second ordre et pour des équations différentielles du second ordre avec des conditions aux limites renfermant la dérivée première. Nous avons traité des exemples élémentaires.

La construction des schémas discrets se complique singulièrement si les équations différentielles sont à coefficients variables. Sur un stencil donné on peut construire une infinité de schémas équivalents par leur ordre d'approximation. Par exemple, pour l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dx^2} - q(x)\,u = -f(x) \tag{1}$$

on peut construire sur le stencil (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) la famille à un paramètre de schémas

$$\begin{gathered} L_h y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - d_i y_i = -f_i, \\ d_i = \alpha q_{i-1} + (1 - 2\alpha)\, q_i + \alpha q_{i+1}, \quad q_i = q(x_i), \end{gathered} \tag{2}$$

possédant un deuxième ordre d'approximation $\psi = L_h u + f = O(h^2)$ quelle que soit la valeur du paramètre α. Dans la formule (2) on peut ajouter le terme βh^2, où β est un nombre arbitraire, au coefficient d_i en y_i sans modifier l'ordre d'approximation. Il se pose donc le problème du choix des schémas discrets dans un ensemble de schémas admissibles, définis sur un stencil et possédant un même ordre d'approximation. Pour cela il nous faut formuler les conditions imposées aux schémas discrets. Toute méthode approchée doit permettre de trouver la solution numérique du problème avec une précision donnée ε au bout d'un nombre fini d'opérations $Q(\varepsilon)$ (en un temps machine fini). Il est naturel de chercher à minimiser le nombre d'opérations $Q(\varepsilon)$, i.e. de trouver une méthode numérique économique.

La résolution numérique du problème de physique mathématique se décompose en deux étapes: a) écriture du système d'équations discrètes (schémas discrets) approchant le problème posé pour l'équation différentielle, b) résolution de ce système d'équations discrètes.

Dans cet ouvrage nous ne verrons que la construction des schémas discrets. Cependant, il ne faudra pas perdre de vue le volume des calculs qu'il faudra effectuer pour trouver la solution et qui dépendent tant de la structure que de l'ordre du système d'équations discrètes.

Avec une méthode de résolution fixe le volume des calculs sera d'autant plus petit que l'ordre du système sera bas (le pas du réseau sera grand). Mais la réduction du nombre de nœuds entraîne une perte de précision du schéma. C'est pourquoi il y a intérêt à disposer d'un schéma d'un ordre maximal de précision (dépendant de la différentiabilité des coefficients de l'équation différentielle, des conditions initiales et aux limites). Pratiquement cela veut dire qu'il faut chercher des schémas de stencil minimal, possédant sur ce dernier un ordre d'approximation maximal si les solutions de l'équation différentielle sont suffisamment différentiables. Il importe de se donner la famille initiale de schémas sur le stencil choisi et de chercher dans cette famille les « meilleurs » schémas dans un sens qu'il faudra préciser. Il faut dire ce qu'on entend par meilleur schéma, i.e. formuler des critères qui définiront la qualité du schéma.

Il est indispensable d'indiquer les caractéristiques aussi bien quantitatives que qualitatives du schéma :

a) Le schéma doit être homogène, i.e. quels que soient le problème de la classe K, le réseau et le nœud, l'écriture des équations discrètes doit obéir à un même principe. La classe de problèmes K est définie par la donnée de l'équation différentielle et de l'espace fonctionnel qui contient les coefficients de cette dernière.

b) Le système d'équations discrètes doit être soluble sur tout réseau admissible et pour tout problème de la classe K.

c) Le schéma doit être convergent pour tout problème de la classe K.

Ces critères définissent la famille initiale de schémas discrets admissibles.

Les schémas doivent remplir les conditions subsidiaires suivantes :

1) l'ordre d'approximation doit être défini (par exemple, $\psi = O(h^2)$ sur l'ensemble $\overline{K}$ ($\subseteq$) K des solutions différentiables),

2) l'ordre de précision doit être maximal sur la classe K tout entière.

3) le schéma doit être économique, i.e. il faut arriver à la solution du système d'équations discrètes en un minimum d'opérations sur machine.

La famille initiale contient un ensemble de « meilleurs schémas » dont la recherche fait précisément l'objet de cette théorie. Arrêtons-nous plus amplement sur la notion d'homogénéité des schémas discrets.

2. Schémas discrets homogènes. Traitons le cas de fonctions d'une variable. Soit

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$$

un réseau sur la droite numérique $-\infty < x < \infty$, $k(x)$, une fonction vectorielle des coefficients de l'équation différentielle. Ainsi, s'agis-

sant de l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(k_1(x)\frac{du}{dx}\right)-k_2(x)\,u=-k_3(x)$$

il est évident que le vecteur $k(x)$ a pour composantes $k_1(x)$, $k_2(x)$, $k_3(x)$.

L'homogénéité du schéma signifie que ses coefficients sont des fonctionnelles des coefficients de l'équation différentielle, qui dépendent du pas h comme d'un paramètre, mais ni du nœud du réseau ni du choix des coefficients $k(x)$.

Soient donnés le stencil

$$\mathfrak{M}=\{-m_1,\ -m_1+1,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ m_2\},$$

où $m_1>0$ et $m_2>0$ sont des entiers sur lesquels est définie une fonction discrète $y(j)$, $j\in\mathfrak{M}$, et le stencil $\Sigma=\{-m_1\leqslant s\leqslant m_2\}$, sur lequel est définie une fonction vectorielle $\bar{k}(s)$ (pour simplifier nous supposerons que les extrémités des stencils $\mathfrak{M}$ et Σ sont confondues).

Désignons par $A_j^h[\bar{k}(s)]$, $F^h[k(s)]$, $j\in\mathfrak{M}$, $s\in\Sigma$ des *fonctionnelles stencils.*

On considère la fonctionnelle

$$\Phi^h[\bar{y}(j)]=\sum_{j=-m_1}^{m_2}A_j^h[\bar{k}(s)]\,\bar{y}^h(j)+F^h[\bar{k}(s)]$$

à partir de laquelle on passe à un schéma homogène. En posant

$$\bar{y}(j)=y^h(x_i+jh),\qquad \bar{k}(s)=k(x_i+sh)$$

et en se servant de l'expression de Φ^h, on obtient le schéma discret homogène

$$(L_hy^h+F^h)_i=\sum_{j=-m_1}^{m_2}A_j^h[k(x_i+sh)]\,y^h(x_i+jh)+F^h[k(x_i+sh)]=0,$$

où $y^h(x_i)$ est une fonction discrète, $k(x)$, une fonction vectorielle de l'argument continu x.

On définit une famille de schémas homogènes par la donnée des fonctionnelles stencils

$$A_j^h[\bar{k}(s)]\quad\text{et}\quad F^h[\bar{k}(s)],\quad j=-m_1,\ -m_1+1,\ \ldots,\ m_2.$$

Ces schémas ne sont pas à proprement parler arbitraires, ils doivent obéir aux critères mentionnés précédemment : solubilité, approximation d'ordre défini et économie.

Illustrons la notion d'homogénéité sur l'exemple de schémas de trois points pour le problème

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u=-f(x),\quad 0<x<1, \tag{3}$$
$$u(0)=\mu_1,\quad u(1)=\mu_2,$$

où $k(x)>0$, $q(x)\geqslant 0$.

Considérons le stencil (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) sur le réseau $\bar{\omega}=\{x_i=ih \mid i=0, 1, \ldots, N, h=1/N\}$, de sorte que $\mathfrak{M}=\{-1, 0, 1\}$ et $m_1=m_2=1$. Supposons que le stencil des coefficients est $\Sigma=\{-1\leqslant s\leqslant 1\}$, et soient $A^h[\bar{k}(s)]$, $B^h[\bar{k}(s)]$, $F^h[\bar{k}(s)]$, $-1\leqslant s\leqslant 1$ des fonctionnelles stencils.

Considérons le schéma discret homogène

$$\frac{1}{h}\left[b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-d_iy_i=-\varphi_i,\quad i=1, 2, \ldots, N-1, \tag{4}$$
$$y_0=\mu_1,\quad y_N=\mu_2,$$

dont les coefficients se définissent de la même façon en tous les nœuds $x_i\in\omega$ et quels que soient $k(x)$, $q(x)$ et $f(x)$:

$$\begin{aligned} a_i&=A^h[k(x_i+sh)], & b_i&=B^h[k(x_i+sh)],\\ d_i&=F^h[q(x_i+sh)], & \varphi_i&=F^h[f(x_i+sh)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Pour simplifier nous avons supposé (cf. 5) que chaque coefficient de l'équation discrète dépendait seulement du coefficient respectif de l'équation différentielle. Dans le cas général, A^h, B^h, F^h sont des fonctionnelles non linéaires.

Soit $u(x)$ une solution du problème (3). L'erreur d'approximation pour le schéma (4) se définit comme le résidu

$$\psi_i=\frac{1}{h}\left[b_i\frac{u_{i+1}-u_i}{h}-a_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right]-d_iu_i+\varphi_i. \tag{6}$$

Si l'on suppose que $u(x)$ est suffisamment différentiable, décompose $u_{i\pm1}$ suivant les puissances de h et désigne par $\rho_i(h)$ toute expression dépendant de x_i et tendant vers zéro avec h, on obtient

$$u_{i+1}=u_i+hu_i'+\frac{h^2}{2}u_i''+h^2\rho_i(h),$$
$$u_{i-1}=u_i-hu_i'+\frac{h^2}{2}u_i''+h^2\rho_i(h),$$
$$\psi_i=\frac{b_i+a_i}{2}u_i''+\frac{b_i-a_i}{h}u_i'-d_iu_i+\varphi_i+\rho_i(h).$$

Une comparaison avec l'équation

$$ku''+k'u'-qu+\varphi=0$$

fait ressortir que

$$\psi_i = \left(\frac{b_i + a_i}{2} - k_i\right) u_i'' + \left(\frac{b_i - a_i}{h} - k_i'\right) u_i' - \\ - (d_i - q_i) u_i + \varphi_i - f_i + \rho_i(h),$$

i.e.

$$\psi_i = \rho_i(h) \to 0 \text{ pour } h \to 0,$$

si seulement

$$\frac{b_i + a_i}{2} = k_i + \rho_i(h), \quad \frac{b_i - a_i}{h} = k_i' + \rho_i(h), \\ d_i = q_i + \rho_i(h), \quad \varphi_i = f_i + \rho_i(h). \tag{7}$$

Dans toute la suite, on supposera que les fonctionnelles stencils A, B, F sont linéaires et ne dépendent pas du paramètre h. Utilisons les développements

$$k(x + sh) = k(x) + shk'(x) + h\rho(h), \quad q(x + sh) = q(x) + \rho(h), \\ f(x + sh) = f(x) + \rho(h)$$

pour établir que

$$a_i = A[1] k_i + hk_i' A[s] + h\rho(h), \\ b_i = B[1] k_i + hk_i' B[s] + h\rho(h), \\ d_i = F[1] q_i + \rho(h), \quad \varphi_i = F[1] f_i + \rho(h).$$

Portant ces expressions dans la condition (7), on obtient

$$A[1] = B[1] = F[1] = 1, \quad B[s] - A[s] = 1. \tag{8}$$

Si ces conditions sont remplies, le schéma (4) possède une approximation i.e. $\psi = \rho(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

L'existence d'une approximation du second ordre pour le schéma (4) se traduit par les conditions

$$\frac{b_i + a_i}{2} = k_i + O(h^2), \quad \frac{b_i - a_i}{h} = k_i' + O(h^2), \\ d_i = q_i + O(h^2), \quad \varphi_i = f_i + O(h^2). \tag{9}$$

On peut s'en assurer en portant

$$u_{i\pm1} = u_i \pm hu_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' \pm \frac{h^3}{6} u_i''' + \frac{h^4}{24} u_i^{\mathrm{IV}} + h^4\rho(h)$$

dans l'expression de ψ_i et en exigeant que $\psi_i = O(h^2)$. Par des raisonnements analogues aux précédents on démontrerait que (9) entraîne en plus de (8) les conditions

$$B[s^2] = A[s^2], \quad F[s] = 0. \tag{10}$$

La condition de solubilité du système d'équations discrètes (4), condition que l'on écrit sous la forme

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -h^2 \varphi_i, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2,$$
$$c_i = a_i + b_i + h^2 d_i, \tag{11}$$

est remplie si

$$a_i > 0, \ b_i > 0, \ c_i - (a_i + b_i) = h^2 d_i \geqslant 0, \tag{12}$$

pour tous les $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Comme $k(x) > 0$, $q(x) \geqslant \geqslant 0$, il suffit d'exiger que les fonctionnelles A, B et F soient positives, i.e.

$$A[\bar{k}(s)] > 0, \quad B[\bar{k}(s)] > 0, \quad F[\bar{k}(s)] > 0 \quad \text{pour } \bar{k}(s) > 0.$$

Dans ce cas $a_i > 0$, $b_i > 0$ et $d_i \geqslant 0$ quels que soient $k(x) > 0$ et $q(x) \geqslant 0$.

Dans le cas le plus simple A, B (et F) sont des combinaisons linéaires des valeurs des fonctions $\bar{k}(s)$ ($\bar{f}(s)$) en un nombre fini de points sur le stencil $\Sigma = \{-1 \leqslant s \leqslant 1\}$, par exemple

$$\begin{aligned} A[\bar{k}(s)] &= \alpha_{-1}\bar{k}(-1) + \alpha_0 \bar{k}(0) + \alpha_1 \bar{k}(1), \\ B[\bar{k}(s)] &= \beta_{-1}\bar{k}(-1) + \beta_0 \bar{k}(0) + \beta_1 \bar{k}(1) \end{aligned} \tag{13}$$

et ainsi de suite, de sorte que

$$a_i = \alpha_{-1} k_{i-1} + \alpha_0 k_i + \alpha_1 k_{i+1}, \quad b_i = \beta_{-1} k_{i-1} + \beta_0 k_i + \beta_1 k_{i+1} \tag{14}$$

(si $k(x)$ est une fonction continue). Les conditions de solubilité (12) sont remplies pour

$$\alpha_j \geqslant 0, \ \beta_j \geqslant 0 \ \text{pour } j = -1, 0, 1. \tag{15}$$

Les conditions d'approximation (8) donnent

$$\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \ \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1, \ \beta_1 - \beta_{-1} = \\ = 1 + \alpha_1 - \alpha_{-1}. \tag{16}$$

Les conditions de normalisation $\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1$ et $\alpha_j \geqslant 0$ entraînent que $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1$ et de façon analogue

$$0 \leqslant \beta_j \leqslant 1, \quad j = -1, 0, 1. \tag{17}$$

Vérifions maintenant les conditions d'appoximation du second ordre (10). Comme $A[s^2] = \alpha_{-1} + \alpha_1$, $B[s^2] = \beta_{-1} + \beta_1$, on a

$$\beta_1 + \beta_{-1} = \alpha_1 + \alpha_{-1} \ \text{ou} \ \beta_0 = \alpha_0. \tag{18}$$

Nous obtenons quatre conditions pour la détermination des six paramètres α_j, β_j, $j = -1, 0, 1$; deux paramètres, α_1 et α_{-1}, sont arbitraires, $\alpha_0 = 1 - (\alpha_1 + \alpha_{-1})$, $\beta_{-1} = \alpha_{-1} - 0{,}5$, $\beta_1 = 0{,}5 + \alpha_1$, $\beta_0 = = \alpha_0$.

3. Schémas discrets conservatifs. En dehors des critères formels — solubilité, approximation d'ordre défini, économie de l'algorithme de calcul — dont la réalisation se vérifie immédiatement, il est nécessaire lorsqu'on choisit le schéma que soit rempli le critère le plus important : la convergence avec une certaine vitesse lorsque le pas tend vers zéro. Il n'est pas toujours très facile d'établir cette propriété surtout si les équations sont à coefficients discontinus ou si elles sont non linéaires.

Au § 1 on a montré que la convergence d'un schéma discret découlait de la stabilité et de l'approximation : si un schéma est stable et approximable il est convergent. On rappelle que la stabilité traduit la propriété de dépendance continue (uniformément au choix du réseau) de la solution du problème discret par rapport au second membre de l'équation et des conditions aux limites.

Dans les cas du premier problème aux limites pour l'erreur $z = y - u$, où u est solution du problème initial pour l'équation différentielle et y, solution du problème discret correspondant, on obtient une équation non homogène dont le second membre est l'erreur d'approximation, et dont les conditions aux limites sont homogènes. Si le schéma est stable, z est évalué au moyen de ψ et cette évaluation entraîne la convergence sous réserve de l'existence d'une approximation sur une suite de réseaux de plus en plus fins. Cependant la connaissance d'une propriété asymptotique du schéma telle que la convergence ne suffit pour juger a priori de la grandeur de l'erreur sur des réseaux fixes, utilisés dans les calculs sur machine. Ces réseaux réels ne peuvent pas être trop fins en raison de la condition d'économie de l'algorithme de calcul. Donc les majorations a priori de la forme

$$\| z \|_{(1)} \leqslant M \| \psi \|_{(2)} \leqslant \overline{M} h^2$$

sont grossières ; de plus elles contiennent des majorations pour les dérivées (du quatrième ordre par exemple) de la solution cherchée $u(x)$. Pour obtenir une bonne approximation sur les réseaux réels il est nécessaire, comme le montre la pratique, d'utiliser des schémas qui traduisent bien les propriétés fondamentales des équations différentielles.

Les équations de physique mathématique décrivent en principe les *lois de conservation* (de l'énergie, de la chaleur, de la masse, de la charge, etc.) sous une forme différentielle. Ainsi, l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{19}$$

peut être interprétée comme l'équation de la distribution stationnaire (i.e. ne dépendant pas du temps) de la température $u = u(x)$ dans une tige $0 < x < 1$ avec un coefficient de conductibilité thermique $k(x)$. En intégrant cette équation sur x de $x^{(1)}$ à $x^{(2)}$, on obtient la

loi de conservation de la chaleur sur l'intervalle $x^{(1)} \leqslant x \leqslant x^{(2)}$

$$W(x^{(2)}) - W(x^{(1)}) = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x)\,dx, \quad W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}. \tag{20}$$

Au premier membre on a la différence des flux de chaleur aux extrémités de l'intervalle, au second la quantité de chaleur dégagée (absorbée).

Pour décrire correctement ce processus physique au moyen d'un modèle discret, il est naturel de faire en sorte que ce modèle discret restitue sur le réseau les propriétés fondamentales de ce processus et notamment les lois de conservation. Les schémas discrets qui traduisent les lois de conservation sur un réseau seront appelés *conservatifs*. Illustrons ce qu'on entend par schéma conservatif sur l'exemple du schéma (4) pour l'équation

$$(k(x)\,u')' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2.$$

Ce schéma s'ecrit

$$\frac{1}{h}\left(b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = -\varphi_i. \tag{21}$$

En le mettant sous la forme

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = -\varphi_i - \frac{b_i - a_{i+1}}{h}\frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

on s'assure que l'analogue discret de l'identité (20) sur l'intervalle $x^{(1)} = i_1 h \leqslant x \leqslant x^{(2)} = i_2 h$ est l'identité

$$W^h_{i_2+1} - W^h_{i_1} = \sum_{i=i_1}^{i_2} h\varphi_i + \sum_{i=i_1}^{i_2} (b_i - a_{i+1})\frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \tag{22}$$

où

$$W^h_i = -a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}.$$

Au second membre figure le balourd

$$D = \sum_{i=i_1}^{i_2} (b_i - a_{i+1})\frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

qui s'annule pour toute fonction discrète y_i seulement pour

$$b_i = a_{i+1}. \tag{23}$$

Dans ce cas on obtient le schéma

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = -\varphi_i, \tag{24}$$

et, au lieu de (22), la loi de conservation discrète

$$W^h_{i_2+1} - W^h_{i_1} = \sum_{i=i_1}^{i_2} h\varphi_i$$

qui est la conséquence algébrique des équations discrètes (24). Le schéma (24) est conservatif et la condition (23) une condition nécessaire et suffisante pour qu'il le soit. La propriété de conservativité du schéma discret est confondue ici avec la propriété d'autoconjugaison de l'opérateur discret

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)$$

dans l'espace des fonctions discrètes, définies sur le réseau

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N,\ h = 1/N\}$$

et nulles sur sa frontière (pour $i = 0, N$).

4. La conservativité est une condition nécessaire de convergence d'un schéma homogène dans la classe des coefficients discrets. Pour justifier les conditions de conservativité montrons que la conservativité d'un schéma homogène est une condition nécessaire de convergence de ce schéma dans la classe des coefficients discontinus, i.e. la convergence du schéma en entraîne la conservativité. On remarquera que puisqu'il est question d'une condition nécessaire, on peut se limiter à l'étude de schémas pour des problèmes simples, exemple

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1,\ u(1) = 0, \tag{25}$$

où $k(x)$ est une fonction constante par morceaux

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_3, & \xi < x < 1. \end{cases}$$

Au point de discontinuité $x = \xi$ sont remplies les conditions ordinaires de conjugaison

$$[u] = u(\xi + 0) - u(\xi - 0) = 0,$$
$$[ku'] = k_2 u'(\xi + 0) - k_1 u'(\xi - 0) = 0.$$

Ce problème admet visiblement une solution sous forme d'une fonction linéaire par morceaux

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \gamma_0 x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \delta_0(1 - x), & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{26}$$

où γ_0 et δ_0 se déduisent à partir des conditions de conjugaison $1 - \gamma_0\xi = \delta_0(1 - \xi)$, $k_1\gamma_0 = k_2\delta_0$ de sorte que

$$\delta_0 = \frac{k_1}{k_2}\gamma_0, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\Delta_0}, \quad \Delta_0 = \xi + \frac{k_1}{k_2}(1 - \xi). \tag{27}$$

Soit $\xi = x_n + \theta h$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Considérons le schéma discret homogène correspondant

$$\frac{1}{h}\left[b_i \frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$
$$\ldots, N-1, \; y_0 = 1, \; y_N = 0, \tag{28}$$

où

$$a_i = A\,[k\,(x_i + sh)], \; b_i = B\,[k\,(x_i + sh)], \; -1 \leqslant s \leqslant 1.$$

Supposons que le schéma (28) approche le problème (25); ceci étant on a les conditions (8)

$$B\,[1] = A\,[1] = 1, \quad B\,[s] - A\,[s] = 1.$$

Comme $k\,(x) = k_1$ pour $x \leqslant x_n$ et $k\,(x) = k_2$ pour $x \geqslant x_{n+1}$ il vient $a_i = b_i = k_1$ pour $0 < i < n$, $a_i = b_i = k_2$ avec $n + 1 < i < N$ et les équations discrètes (28) prennent la forme $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0$ pour $0 < i < n$ et $n + 1 < i < N$, $y_0 = 1, y_N = 0$:

$$b_n\,(y_{n+1} - y_n) - a_n\,(y_n - y_{n-1}) = 0,$$
$$b_{n+1}\,(y_{n+2} - y_{n+1}) - a_{n+1}\,(y_{n+1} - y_n) = 0.$$

D'où il s'ensuit que $y_i = 1 - \gamma x_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et $y_i = \delta\,(1 - x_i)$ pour $n + 1 \leqslant i \leqslant N$, où γ et δ sont des coefficients qui sont à déterminer à partir des équations pour $i = n$, $n + 1$.

En éliminant la différence $y_{n+1} - y_n$ de ces équations pour $i = n$ et $i = n + 1$, on obtient

$$\delta = \frac{a_n a_{n+1}}{b_n b_{n+1}}\,\gamma.$$

En portant cette expression dans l'équation pour $i = n$ on obtient

$$\gamma = \frac{1}{h a_n / b_n + x_n + (1 - x_{n+1})\, a_n a_{n+1} / (b_n b_{n+1})}.$$

Moyennant une interpolation linéaire, définissons en tous les points $x \in [0, 1]$ la fonction

$$\tilde{y}\,(x, h) = y_i + \frac{x - x_i}{h}\,(y_{i+1} - y_i) \quad \text{pour} \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}.$$

On aura alors

$$\tilde{y}\,(x, h) = \begin{cases} 1 - \gamma x & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \delta\,(1 - x) & \text{pour} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{29}$$

Supposons que le schéma discret est convergent dans C; il vient

$$|\,\tilde{y}\,(x, h) = u\,(x)\,| \to 0 \quad \text{pour} \quad h \to 0,$$

En comparant l'expression de $\tilde{y}\,(x, h)$ avec la formule de $u\,(x)$ on obtient: $\gamma \to \gamma_0$ et $\delta \to \delta_0$ lorsque $h \to 0$. Dans la formule de γ, en passant à la limite pour $h \to 0$, on constate que $\lim\limits_{h \to 0} \gamma = \gamma_0$, si seule-

ment

$$R_n = \frac{b_n b_{n+1}}{k_2} - \frac{a_n a_{n+1}}{k_1} \to 0 \quad \text{pour} \quad h \to 0. \tag{30}$$

C'est une condition nécessaire de convergence du schéma (28).

Donnons-nous maintenant la famille initiale de schémas en définissant les fonctionnelles stencils linéaires A et B au moyen de la formule (14) du pt. 2, de sorte que

$$a_i = \alpha_{-1}k_{i-1} + \alpha_0 k_i + \alpha_1 k_{i+1}, \quad b_i = \beta_{-1}k_{i-1} + \\ + \beta_0 k_i + \beta_i k_{i+1}. \tag{14}$$

Dans cette famille de schémas (linéaires et « discrets »), considérons l'ensemble des schémas convergeant dans la classe des coefficients discontinus $k(x)$ et montrons qu'ils sont conservatifs.

Le schéma possédant une approximation, les coefficients α_k et β_k vérifient les conditions (16) que nous récrirons encore

$$\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \quad \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1, \tag{31}$$

$$\beta_1 - \beta_{-1} = 1 + \alpha_1 - \alpha_{-1}. \tag{32}$$

Calculons a_i, b_i, pour $i = n, n+1$:

$$a_n = (\alpha_{-1} + \alpha_0)\, k_1 + \alpha_1 k_2 = (1 - \alpha_1)\, k_1 + \alpha_1 k_2,$$
$$b_n = (1 - \beta_1)\, k_1 + \beta_1 k_2,$$
$$a_{n+1} = \alpha_{-1}k_1 + (\alpha_0 + \alpha_1)\, k_2 = \alpha_{-1}k_1 + (1 - \alpha_{-1})\, k_2,$$
$$b_{n+1} = \beta_{-1}k_1 + (1 - \beta_{-1})k_2.$$

Considérons la différence R_n. Elle ne dépend pas de h, donc la condition (30) est remplacée par l'équation $R_n = 0$ quel que soit h. En multipliant R_n par k_1/k_2^2 et en posant $t = k_1/k_2$, on obtient

$$t((1-\beta_1)t + \beta_1)(\beta_{-1}t + (1-\beta_{-1})) - ((1-\alpha_1)t + \alpha_1)(\alpha_{-1}t + (1-\alpha_1)) = 0$$

ou

$$(1-\beta_1)\beta_{-1}t^3 + [\beta_1\beta_{-1} + (1-\beta_1)(1-\beta_{-1}) - \alpha_{-1}(1-\alpha_1)]\, t^2 + \\ + [\beta_1(1-\beta_{-1}) - \alpha_1\alpha_{-1} - (1-\alpha_1)(1-\alpha_{-1})]\, t - \alpha_1(1-\alpha_{-1}) = 0.$$

t étant arbitraire, tous les coefficients en les puissances de t sont nuls:

$$(1-\beta_1)\beta_{-1} = 0, \quad (1-\alpha_{-1})\alpha_1 = 0,$$
$$\beta_1\beta_{-1} + (1-\beta_1)(1-\beta_{-1}) - \alpha_{-1}(1-\alpha_1) = 0, \tag{33}$$
$$\beta_1(1-\beta_{-1}) - \alpha_1\alpha_{-1} - (1-\alpha_{-1})(1-\alpha_1) = 0.$$

Les deux dernières expressions découlent des conditions (32) et (33).

Le système d'équations (31) à (33) possède, compte tenu des contraintes (15), une famille à un paramètre de solutions non négatives

$$\beta_{-1} = \alpha_1 = 0, \ \alpha_{-1} = \beta_0 = 1 - \alpha_0, \ \beta_1 = \alpha_0, \ 0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1.$$

En effet, supposons que $\alpha_1 = \beta_{-1} = 0$. De (31) et (32) on déduit :

$$\beta_1 = 1 - \alpha_{-1} = \alpha_0, \quad \beta_0 = 1 - \beta_1 = 1 - \alpha_0.$$

Si l'on pose $\beta_{-1} = 0$, $\alpha_{-1} = 1$, alors en vertu des conditions (15), on obtient un cas particulier de la solution précédente, correspondant à $\alpha_0 = 0$.

On étudie de façon analogue les autres solutions du système (33). Compte tenu de la solution trouvée du système (31), à (33) et de (15), il vient

$$a_i = (1 - \alpha_0)k_{i-1} + \alpha_0 k_i, \quad b_i = (1 - \alpha_0)k_i + \alpha_0 k_{i+1}, \quad (34)$$

i.e. $b_i = a_{i+1}$.

Nous avons donc montré que *si un schéma de la famille initiale* (28), (14), (15) *converge dans la classe des coefficients continus par morceaux, il est conservatif* et s'écrit

$$\Lambda y = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (35)$$

où

$$a_i = (1 - \alpha_0)k_{i-1} + \alpha_0 k_i, \quad 0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1,$$

α_0 est un paramètre arbitraire. Ce schéma possède de toute évidence un premier ordre d'approximation quel que soit α_0 et un deuxième ordre pour $\alpha_0 = 0{,}5$, i.e. pour $a_i = 0{,}5\,(k_{i-1} + k_i)$. La conservativité est une condition nécessaire et suffisante de convergence dans la classe des coeffficients discontinus pour le schéma

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \ y_0 = \mu_1, \ y_N = \mu_2,$$

correspondant à l'équation (3). Nous ne démontrerons pas la condition suffisante.

Citons à titre d'exemple le schéma non conservatif obtenu par approximation du deuxième ordre sur h de chaque terme de l'équation

$$Lu = (ku')' - qu = -ku'' + k'u' - qu = -f.$$

Une telle approximation naturelle engendre le schéma

$$k_i\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = -f_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1. \quad (36)$$

Ecrivons-le sous la forme

$$\frac{1}{h}\left[b_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-d_iy_i=-\varphi_i,$$

où

$$d_i=q(x_i),\quad \varphi_i=f(x),$$

$$a_i=k_i-\frac{1}{4}(k_{i+1}-k_{i-1}),\quad b_i=k_i+\frac{1}{4}(k_{i+1}-k_{i-1}).$$

On constate que $b_i\neq a_{i+1}$, i.e. le schéma (36) n'est pas conservatif. Comparant avec (28), on voit que (36) correspond aux valeurs

$$\alpha_{-1}=\frac{1}{4},\quad \alpha_0=1,\quad \alpha_1=-\frac{1}{4},\quad \beta_{-1}=-\frac{1}{4},\quad \beta_0=1,\quad \beta_1=\frac{1}{4}.$$

En général ce schéma n'est pas soluble. Il le sera toutefois si

$$k_i>\frac{1}{4}\,|k_{i+1}-k_{i-1}|,$$

Pour le problème (36) on a notamment

$$a_n>0,\quad b_n>0,\quad a_{n+1}>0,\quad b_{n+1}>0 \text{ pour } \frac{1}{5}<\frac{k_1}{k_2}<5.$$

En portant les expressions de

$$a_n=\frac{5k_1-k_2}{4},\quad b_n=\frac{3k_1+k_2}{4},\quad a_{n+1}=\frac{3k_2+k_1}{4},\quad b_{n+1}=\frac{5k_2-k_1}{4}$$

dans

$$R_n=\frac{b_nb_{n+1}}{k_2}-\frac{a_na_{n+1}}{k_1}=0,$$

on obtient l'égalité $(k_2-k_1)^3=0$ qui est vérifiée uniquement pour $k_1=k_2$. Donc, le schéma (36) sera divergent dans la classe des coefficients continus par morceaux.

§ 3. Méthodes de construction des schémas discrets

1. Méthode du bilan (méthode d'intégration et d'interpolation). Voyons comment construire un schéma discret pour l'équation différentielle à coefficients variables:

$$Lu\equiv(k(x)u')'-q(x)u(x)=-f(x). \tag{1}$$

Nous allons traiter l'équation (1) comme une équation de distribution stationnaire de la chaleur dans une tige. La loi de la conservation de la chaleur (*équation du bilan*) s'écrit sur l'intervalle $[x^{(1)}, x^{(2)}]$:

$$W(x^{(1)})-W(x^{(2)})-\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}q(x)u(x)\,dx+\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}f(x)\,dx=0 \tag{2}$$

et peut être obtenue par une intégration de l'équation (1) sur l'intervalle $[x^{(1)}, x^{(2)}]$. Ici $W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}$ est le flux de chaleur, $k(x) > 0$, le coefficient de conductibilité thermique, $u(x)$, la température.

Utilisons l'équation du bilan (2) pour écrire un schéma discret pour l'éqation (1). Supposons que ω est un réseau régulier de pas h et $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0{,}5\,h$, $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + 0{,}5\,h$.

Composons l'équation du bilan (2) sur l'intervalle $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$:

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx = 0. \qquad (3)$$

Pour construire le schéma discret approchons W et la première intégrale de (3). Supposons que $u = \text{const} = u_i$ pour $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$. Il vient

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx \approx h d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx, \quad (q(x) \geqslant 0).$$

Intégrons l'égalité $du/dx = -W/k$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)}\,dx.$$

Comme W figure dans (3) aux points $x_{i+1/2}$, en posant $W = \text{const} = W_{i-1/2}$ pour $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, on aura

$$u_{i-1} - u_i \approx W_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

ou

$$W_{i-1/2} \approx -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x},i}, \qquad (5)$$

$$a_i = \left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}. \qquad (6)$$

En portant dans (3) les expressions (4) et (5) et en désignant la fonction inconnue par y_i, on obtient un schéma discret qui traduit la loi de la conservation de la chaleur sur le réseau

$$\frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

ou tout simplement en notations sans indices

$$(ay_{\bar{x}})_x = dy = -\varphi, \tag{7}$$

où

$$\varphi = \varphi_i = \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx.$$

Les coefficients du schéma discret (7) se calculent au moyen d'intégrales avec les formules (4), (6) et (8). Si les coefficients de l'équation sont des fonctions différentiables, à $O(h^2)$ près on peut remplacer a, d et φ par les expressions

$$a_i = k(x_{i-1/2}),\ d_i = q(x_i),\ \varphi_i = f(x_i). \tag{9}$$

L'équation du bilan (2) peut être utilisée dans la construction de schémas discrets sur un réseau irrégulier. Soit ω un réseau irrégulier et $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. En posant

$$x_{i-1/2} = x_i - 0{,}5h_i,\ x_{i+1/2} = x_i + 0{,}5h_{i+1}$$

et en écrivant l'équation du bilan (2) pour l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ on obtient la relation (3). Au lieu de (4) on aura sur le réseau irrégulier

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx \approx \hbar_i d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{\hbar_i} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx, \tag{4'}$$

où $\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$.

Il faut procéder aux mêmes corrections dans (6) et (8):

$$a_i = \left[\frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x_i)}\right]^{-1}, \tag{6'}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{\hbar_i} \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx. \tag{8'}$$

Sur le réseau irrégulier le schéma discret s'écrira

$$\frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{a_i(y_i - y_{i-1})}{h_i}\right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1$$

Si les fonctions $k(x)$, $q(x)$ et $f(x)$ sont suffisamment différentiables, les coefficients a, d et φ peuvent être calculés avec les formules (9).

Considérons encore un exemple. Construisons une approximation discrète d'une condition aux limites de troisième espèce pour

l'équation (1). Supposons que cette condition est donnée au point $x = 0$ et qu'elle est de la forme

$$u'(0) = \tilde{\varkappa} u(0) - \tilde{g}. \tag{10}$$

Par hypothèse, le coefficient $k(x)$ de l'équation (1) est positif. Nous pouvons donc récrire la condition (10) sous la forme plus commode

$$k(0)\, u'(0) = \varkappa u(0) - g, \tag{11}$$

où $\varkappa = \tilde{\varkappa} k(0)$, $g = \tilde{g} k(0)$. Il est plus naturel d'écrire la condition aux limites sous la forme (11), car au premier membre on a maintenant le flux de chaleur au signe près. Composons l'équation du bilan (2) sur l'intervalle $[0, h/2]$:

$$W_0 - W_{1/2} - \int_0^{h/2} q(x)\, u(x)\, dx + \int_0^{h/2} f(x)\, dx = 0. \tag{12}$$

De (11) il vient

$$W_0 \equiv -k(0)\, u'(0) = -\varkappa u(0) + g.$$

En portant cette expression dans (12), il vient

$$-W_{1/2} = -\varkappa u_0 + g + \int_0^{h/2} q(x)\, u(x)\, dx + \int_0^{h/2} f(x)\, dx. \tag{13}$$

Pour approcher $W_{1/2}$ et $\int_0^{h/2} g(x)\, u(x)\, dx$ dans (13) nous allons reprendre les mêmes raisonnements que pour les relations (4) et (5). On obtient en définitive

$$a_1 y_{x,0} = \left(\varkappa + \frac{h}{2} d_0\right) y_0 - \left(g + \frac{h}{2} \varphi_0\right) = \bar{\varkappa} y_0 - \bar{g}, \tag{14}$$

où

$$a_1 = \left[\frac{1}{h} \int_0^h \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}, \quad d_0 = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} g(x)\, dx, \quad \varphi_0 = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} f(x)\, dx.$$

Ces intégrales peuvent être également remplacées par des sommes, par exemple: $a_1 = k(x_{1/2}) = k_{1/2}$, $d_0 = q_0$, $\varphi_0 = f_0$.

Il est immédiat de vérifier que les équations discrètes (7) de coefficients (4), (6), (8) ou (9) approchent l'équation (1) à $O(h^2)$ si sa solution $u = u(x)$ est suffisamment différentiable. La condition aux limites discrète (14) approche également la condition (11) à $O(h^2)$. Il est évident que si $k(x) \equiv 1$ et $q(x) \equiv 0$ la condition aux limites (14) est confondue avec la condition aux limites du problème (10) du § 1.

2. Méthode de Ritz. On rappelle qu'en élaborant des méthodes numériques de résolution de problèmes aux limites à opérateur autoconjugué, il est souhaitable de conserver la propriété d'autoconjugaison pour le problème discret. Mais si l'équation possède une forme assez compliquée, et que les conditions aux limites contiennent des dérivées, on aura parfois de grandes difficultés à écrire un schéma autoconjugué satisfaisant. On décrira ici la méthode de Ritz qui conduit toujours à un schéma autoconjugué.

Rappelons le principe de cette méthode. On sait que tout problème autoconjugué posé pour une équation différentielle peut être ramené à un problème équivalent de recherche d'une fonction minimisant une fonctionnelle. Ainsi la résolution du problème aux limites

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u=-f(x), \quad 0<x<1, \tag{15}$$

$$k(0)u'(0)=\varkappa_0 u(0)-g_0, \quad -k(1)u'(1)=\varkappa_1 u(1)-g_1 \tag{16}$$

revient à chercher une fonction $u(x)$ minimisant la fonctionnelle

$$I(u)\equiv\frac{1}{2}[u, u]-\int_0^1 f(x)u(x)\,dx-g_0u(0)-g_1u(1), \tag{17}$$

où

$$[u, v]=\int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x)+q(x)u(x)v(x)]\,dx+$$
$$+\varkappa_0 u(0)v(0)+\varkappa_1 u(1)v(1), \tag{18}$$

pour laquelle l'expression (15) est *l'équation d'Euler*. Il est standard que si la fonction $q(x)$ et les constantes $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ ne sont pas négatives et $q(x)$ non identiquement nul, le minimum de la fonctionnelle (17) existe et l'élément minimisant $u(x)$ appartient à l'espace $W_2^1[0, 1]$ de toutes les fonctions de l'espace $L_2[0, 1]$ admettant sur $[0, 1]$ des dérivées généralisées de carré intégrable.

Donc, si l'on dispose d'un problème variationnel équivalent et si sa fonctionnelle admet un minimum, au lieu de construire la méthode de résolution numérique approchée du problème aux limites, on peut se servir de la méthode de Ritz pour trouver approximativement l'élément u minimisant la fonctionnelle $I(u)$. Rappelons le principe de cette méthode. Soit W l'espace contenant le minimum de la fonctionnelle $I(u)$, i.e. supposons que la fonctionnelle $I(u)$ est définie sur des éléments $u \in W$ et l'élément u qui réalise le minimum de $I(u)$ appartient à W. Construisons une suite de sous-espaces de dimension finie $V_n \in W$ et au lieu de chercher le minimum sur W, cherchons-le sur V_n. Supposons que le sous-espace V_n est de dimension n et soit $\eta_i^{(n)}$, $i=0, 1, \ldots, n-1$ une *base* de ce sous-espace,

i.e. supposons que tout élément $u_n \in V_n$ s'écrive

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}. \tag{19}$$

En substituant à u l'expression de u_n dans la fonctionnelle $I(u)$, on obtient une fonction de n variables $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Vu que nous cherchons le minimum de cette fonction, les nombres a_i doivent satisfaire au système d'équations

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{20}$$

En résolvant ce système, nous obtenons les valeurs des paramètres $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ qui réalisent le minimum absolu de la fonction $I(u_n)$. En portant a_i dans (19), on obtient la solution approchée désirée

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \eta_i^{(n)}.$$

Pour que la solution approchée u_n converge vers la solution exacte u lorsque $n \to \infty$, il est nécessaire de supposer que les sous-espaces de dimension finie V_n approchent dans un certain sens l'espace W.

Cherchons la forme du système (20) en partant d'une fonctionnelle donnée (17). En portant (19) dans (17), on obtient

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}, \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}\right] - \int_0^1 f \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}\, dx - g_0 \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}(0) -$$

$$- g_1 \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}(1) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_{ij} a_i a_j - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i a_i, \tag{21}$$

où

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = [\eta_i^{(n)}, \eta_j^{(n)}], \tag{22}$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x)\, \eta_i^{(n)}(x)\, dx + g_0 \eta_i^{(n)}(0) + g_1 \eta_i^{(n)}(1). \tag{23}$$

En dérivant l'expression (21) par rapport à a_i et annulant les dérivées, on obtient le système d'équations pour la détermination des a_i :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} a_j - \beta_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{24}$$

3. Construction par la méthode de Ritz d'un schéma discret pour une équation du second ordre. Ce qui précède concerne la méthode de Ritz en général. Notre objectif est de construire à l'aide de la méthode de Ritz un schéma discret pour le problème (15), (16). Ce que l'on peut faire en choisissant dûment les sous-espaces de dimen-

sion finie V_n et des fonctions coordonnées dans ces sous-espaces. Introduisons sur l'intervalle [0,1] un schéma régulier $\bar{\omega}$ de pas $h = 1/(n-1)$ et de nœuds $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Posons $N = n-1$. Le système (24) aura la forme d'un schéma discret de trois points si la matrice du système est tridiagonale, i.e. si les coefficients α_{ij} sont nuls pour $|i-j| > 1$. Sous ces conditions le système (24) sera un schéma discret classique si pour paramètres

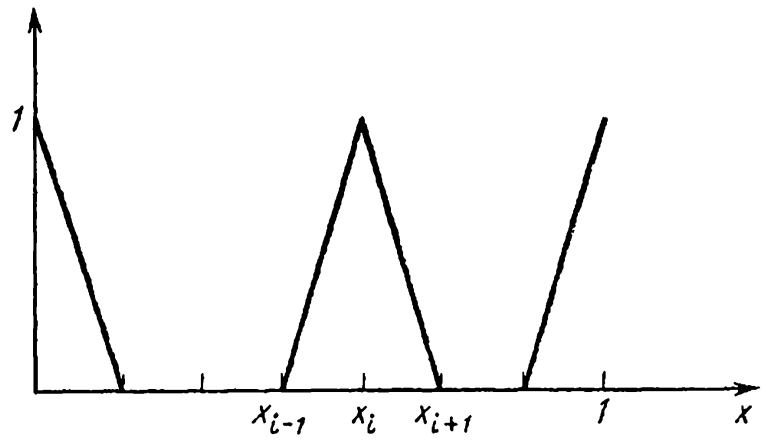


Fig. 4

dans le développement (19) on choisit les valeurs de la fonction aux nœuds du réseau $\bar{\omega}$. La matrice du système (24) sera tridiagonale si les fonctions coordonnées du sous-espace V_n pour $|i-j| \geqslant 2$ seront orthogonales au sens du produit scalaire (18). Si pour fonctions coordonnées $\eta_i^{(N+1)}(x)$ on prend des fonctions qui ne sont pas nulles uniquement pour $|x - x_i| \leqslant h$, $x \in [0, 1]$, elles seront orthogonales au sens (18) pour $|i-j| \geqslant 2$.

Les fonctions de ce type les plus simples appartenant à W_2^1 sont

$$\eta_i^{(N+1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant x_{i-1},\ x_{i+1} \leqslant x < 1, \\ (x - x_{i-1})/h & \text{pour } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \\ (x_{i+1} - x)/h & \text{pour } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \end{cases} \tag{25}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, N-1$,

$$\begin{aligned} \eta_0^{(N+1)}(x) &= \begin{cases} (h-x)/h, & 0 \leqslant x \leqslant h, \\ 0, & h \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \\ \eta_N^{(N+1)}(x) &= \begin{cases} (x-1+h)/h, & 1-h \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1-h. \end{cases} \end{aligned} \tag{26}$$

La figure 4 représente les fonctions $\eta_i^{(N+1)}(x)$ là où elles ne sont pas nulles.

Si pour fonctions coordonnées on prend les fonctions (25), (26) et pour paramètres du développement (19) les valeurs de la fonction aux nœuds du réseau, les sous-espaces V_{N+1} seront composés de fonctions continues linéaires par morceaux. Ces sous-espaces approchent W_2^1 pour $N = 1, 2, \ldots$ Et le système (24) s'écrit

$$\alpha_{i,\,i-1}y_{i-1} + \alpha_{i,\,i}\,y_i + \alpha_{i,\,i+1}y_{i+1} - \beta_i = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{27}$$

$$\alpha_{0,\,0}y_0 + \alpha_{0,\,1}y_1 - \beta_0 = 0,$$

$$\alpha_{N,\,N-1}y_{N-1} + \alpha_{N,\,N}y_N - \beta_N = 0.$$

Calculons les coefficients α_{ij} et β_i. En utilisant la forme (25), (26) des fonctions $\eta_i^{(N+1)}(x)$ et les formules (18), (22), on trouve

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,\,i} &= h^{-2}\Big[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k(x)\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\,(x-x_{i-1})^2\,dx + \\
&\qquad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\,(x-x_{i+1})^2\,dx\Big],\\
\alpha_{0,\,0} &= h^{-2}\Big[\int_0^h k(x)\,dx + \int_0^h q(x)\,(x-h)^2\,dx\Big] + \varkappa_0,\\
\alpha_{N,\,N} &= h^{-2}\Big[\int_{1-h}^1 k(x)\,dx + \int_{1-h}^1 q(x)\,(x-1+h)^2\,dx\Big] + \varkappa_1,\\
\alpha_{i,\,i+1} &= \alpha_{i+1,\,i} = h^{-2}\Big[-\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\,dx + \\
&\qquad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\,(x_{i+1}-x)\,(x-x_i)\,dx\Big],\\
\beta_i &= h^{-1}\Big[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,(x-x_{i-1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,(x_{i+1}-x)\,dx\Big],\\
\beta_0 &= h^{-1}\int_0^h f(x)\,(h-x)\,dx + g_0,\\
\beta_N &= h^{-1}\int_{1-h}^1 f(x)\,(x-1+h)\,dx + g_1.
\end{aligned} \tag{28}$$

Introduisons les notations :

$$a_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,dx - h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x_i - x)(x - x_{i-1})\,dx,$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

$$d_i = h^{-2}\Big[\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1} - x)\,dx\Big],$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

$$d_0 = 2h^{-2} \int_0^h q(x)(h - x)\,dx,$$
$$d_N = 2h^{-2} \int_{1-h}^1 q(x)(x - 1 + h)\,dx, \tag{29}$$

$$\varphi_i = h^{-1}\beta_i = h^{-2}\Big[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)\,dx\Big],$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\varphi_0 = 2h^{-2} \int_0^h f(x)(h - x)\,dx, \quad \varphi_N = 2h^{-2} \int_{1-h}^1 f(x)(x - 1 + h)\,dx.$$

En utilisant les notations (29) et la forme des coefficients α_{ij} et β_j, et en tenant compte de (28), on peut écrire le système (27) comme suit :

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x),\ x = h,\ 2h,\ \ldots,\ 1-h,$$
$$a_1 y_{x,0} = (\varkappa_0 + 0{,}5hd_0)y_0 - (g_0 + 0{,}5\,h\varphi_0),\ x = 0, \tag{30}$$
$$-a_N y_{\bar{x},N} = (\varkappa^1 + 0{,}5h\,d_N)y_N - (g_1 + 0{,}5h\varphi_N),\ x = 1.$$

Il est aisé de vérifier que si les coefficients $k(x)$, $q(x)$ et $f(x)$ sont suffisamment dérivables, on aura un écart de $O(h^2)$ entre a_i, d_i, φ_i et $k(x_i - 0{,}5\,h)$, $q(x_i)$, $f(x_i)$ respectivement et exceptionnellement de $O(h)$ entre d_0, d_N, φ_0 et φ_N et les valeurs respectives des coefficients $q(x)$ et $f(x)$. Avec un tel choix des coefficients les approximations de l'équation et de la condition aux limites gauche (30) coïncident avec la méthode du bilan construite auparavant avec les approximations (7) et (14). Donc le problème discret (30) approche le problème (15), (16) avec une erreur de $O(h^2)$, sous réserve que les coefficients soient suffisamment dérivables.

Si les coefficients $k(x)$ et $q(x)$ sont constants, on peut expliciter a_i et d_i:

$$a_i = a = k - \frac{h^2}{6} q, \quad d_i = d = q.$$

4. Construction par la méthode de Ritz de schémas discrets pour une équation du quatrième ordre. Considérons encore un exemple de construction d'un schéma discret par la méthode de Ritz pour un problème variationnel. Construisons le schéma discret, approximant un problème aux limites posé pour une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre avec des conditions aux limites dites principales.

Soit le problème

$$u^{\mathrm{IV}}(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{31}$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \tag{32}$$

La résolution du problème (31), (32) revient à chercher une fonction $u(x)$ vérifiant les conditions (32) et réalisant le minimum de la fonctionnelle

$$I(u) \equiv \int_0^1 (u'')^2\, dx - 2 \int_0^1 f(x)\, u(x)\, dx. \tag{33}$$

Il est classique que sous les conditions (32) le minimum de la fonctionnelle (33) existe et que l'élément minimisant appartient à l'espace $\overset{\circ}{W}{}_2^2\,[0, 1]$ des fonctions de $L_2\,[0, 1]$, vérifiant les conditions (32), et admettant sur $[0, 1]$ des dérivées première et seconde généralisées de carré intégrable. Donc, si l'on se sert de la méthode de Ritz pour chercher une solution approchée du problème (33), il convient de prendre pour V_n des sous-espaces de dimension finie de $\overset{\circ}{W}{}_2^2$. Si, comme précédemment, $\eta_i^{(n)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ sont des fonctions coordonnées dans V_n et a_i les coefficients du développement (19), pour la détermination des a_i on obtient de nouveau le système (24), mais cette fois-ci

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_0^1 \frac{d^2\eta_i^{(n)}}{dx^2} \cdot \frac{d^2\eta_j^{(n)}}{dx^2}\, dx,$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x)\, \eta_i^{(n)}(x)\, dx.$$

Considérons sur $[0, 1]$ un réseau régulier. On cherchera une solution approchée du problème (31), (32) uniquement aux nœuds intérieurs du réseau $\overline{\omega}$, i.e. sur $\omega = \{x_i = ih \mid i = 1, 2, 3, \ldots, N-1\}$

Pour que l'on puisse obtenir un schéma discret à partir du système (24), il faut qu'à la rigueur une partie des coefficients a_i de (19) soient les valeurs de la fonction discrète aux nœuds de ω. Ceci étant les fonctions coordonnées ne sont pas nulles en un nœud du réseau et pas plus, car autrement les valeurs de la fonction aux nœuds du réseau ne pourraient être des paramètres. Bien plus, on ne pourra se limiter à ces seuls paramètres, puisque dans ce cas les sous-espaces V_n n'approcheront pas $\overset{\circ}{W}{}_2^2$. Plus exactement, ces familles interdisent d'approcher uniformément les dérivées, ce qui est indispensable pour approcher $\overset{\circ}{W}{}_2^2$.

Donc, le nombre de paramètres (et partant celui de fonctions coordonnées) doit être nécessairement augmenté. Pour paramètres supplémentaires on peut prendre les valeurs des dérivées de la fonction cherchée aux nœuds du réseau. Les inconnues du système (24) seront donc les valeurs de la solution cherchée et de ses dérivées premières aux mêmes nœuds. Donc, le système (24) ne sera plus un schéma discret au sens classique; mais ce dernier pourra être obtenu à partir de (24) par élimination des inconnues auxiliaires.

Posons donc $n = 2(N-1)$ et pour paramètres a_i prenons les quantités: $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ et $v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}$. Supposons que le premier groupe de paramètres représente les valeurs de la solution cherchée aux nœuds du réseau ω et le second, les valeurs de la dérivée première en ces mêmes nœuds. Dans l'exemple précédent, pour sous-espace V_n nous avons pris l'espace des fonctions continues linéaires par morceaux (linéaires sur tout intervalle $[x_{i-1}, x_i]$). Cette fois-ci nous ne prendrons pas cet espace, puisque ces fonctions n'appartiennent même pas à l'espace $W_2^2[0, 1]$ en raison des discontinuités présentées par les dérivées premières aux nœuds du réseau ω. Pour V_n nous pouvons prendre l'espace des fonctions continues polynomiales par morceaux (de degré > 1) possédant des dérivées premières continues. On rappelle que la dimension de l'espace V_n a été posée égale à $2(N-1)$. Si nous essayons de prendre pour V_n l'espace des fonctions quadratiques par morceaux (i.e. quadratiques sur tout intervalle $[x_{i-1}, x_i]$) suffisamment différentiables on constatera que cet espace ne convient pas, car il sera de dimension $N-2$ (N paraboles du second ordre possèdent $3N$ coefficients. Pour vérifier les conditions aux limites (32) et assurer la continuité des fonctions et de leurs dérivées premières aux nœuds du réseau ω, il faut $2(N+1)$ conditions). Mais pour V_n on peut prendre l'espace des fonctions quadratiques par morceaux appartenant à $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ et représentables par deux paraboles sur tout intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Cet espace sera de dimension $2(N-1)$. Pour V_n on peut également prendre l'espace des fonctions cubiques par morceaux (i.e. cubiques sur tout intervalle $[x_{i-1}, x_i]$) de $\overset{\circ}{W}{}_2^2$.

Nous avons déjà défini le sens des coefficients a_i du développement (19), donc on peut définir de façon unique une base dans V_n. Celle-ci sera composée de fonctions de deux types que nous désignerons par $\eta_i(x)$ et $\zeta_i(x)$. Supposons que dans (19) les coefficients en les fonctions $\eta_i(x)$ sont les paramètres y_i et en $\zeta_i(x)$ les paramètres v_i. Les fonctions coordonnées $\eta_i(x)$ devront alors s'annuler en tous les nœuds du réseau ω, sauf au nœud x_i, où la fonction $\eta_i(x)$ doit être égale à l'unité. Les dérivées premières des fonctions $\eta_i(x)$ doivent s'annuler en tous les nœuds du réseau ω. Les fonctions coordonnées $\zeta_i(x)$ doivent s'annuler en tous les nœuds du réseau et posséder une dérivée égale à l'unité au nœud x_i. Dans les autres nœuds, les dérivées premières de $\zeta_i(x)$ sont nulles. Il est immédiat de vérifier que dans l'espace des fonctions cubiques par morceaux, une base est

$$\eta_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\quad x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ -2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^3+3\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\\ 2\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^3+3\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}\end{cases} \tag{34}$$

$$\zeta_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\qquad x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ h\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^3-h\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\\ h\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^3+h\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}.\end{cases} \tag{35}$$

Dans l'espace des fonctions quadratiques par morceaux, une base est

$$\bar{\eta}_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\quad x_{i+1}\leqslant x<1,\\ 2\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i-0{,}5h,\\ -2\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2+1, & x_i-0{,}5h\leqslant x\leqslant x_i+0{,}5h,\\ 2\left(\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)^2, & x_i+0{,}5h\leqslant x\leqslant x_{i+1},\end{cases} \tag{36}$$

$$\bar{\zeta}_i(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant x_{i-1},\quad x_{i+1}\leqslant x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2h}(x-x_{i-1})^2, & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i-0{,}5h,\\ x-x_i+\frac{3}{2h}(x-x_i)^2, & x_i-0{,}5h\leqslant x\leqslant x_i,\\ x-x_i-\frac{3}{2h}(x-x_i)^2, & x_i\leqslant x\leqslant x_i+0{,}5h,\\ \frac{1}{2h}(x-x_{i+1})^2, & x_i+0{,}5h\leqslant x\leqslant x_{i+1}.\end{cases} \tag{37}$$

Les figures 5*a* et *b* représentent les fonctions (34) à (37).

Donc, on cherchera une solution approchée du problème (33) sous la forme

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} (y_i \eta_i(x) + x_i \zeta_i(x)). \tag{38}$$

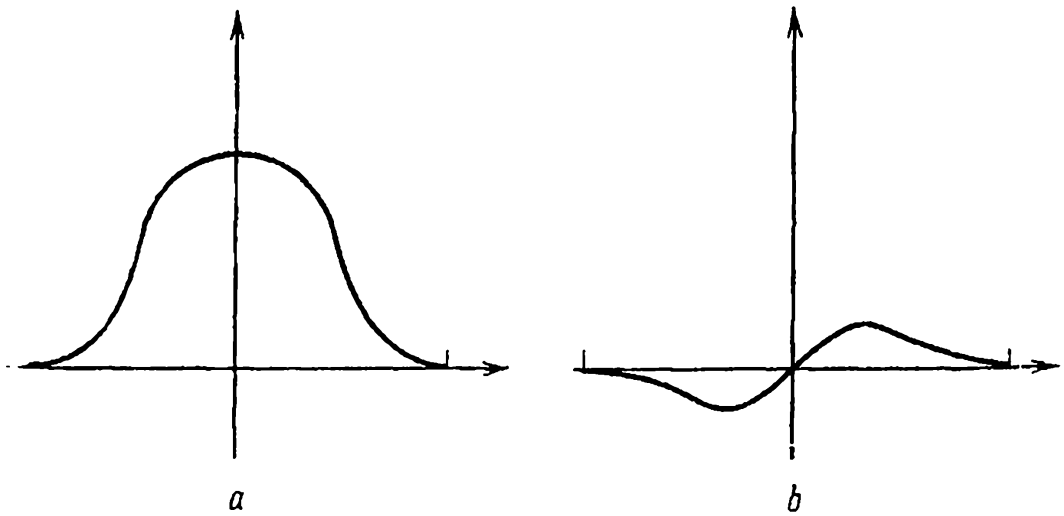


Fig. 5

En portant (38) dans (33), on obtient

$$I(u_N) = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{N-1} (y_i \eta_i''(x) + v_i \zeta_i''(x)) \right]^2 dx -$$

$$- 2 \int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^{N-1} (y_i \eta_i(x) + v_i \zeta_i(x))\, dx = \int_0^1 \sum_{i,\, j=1}^{N-1} (y_i y_j \eta_i'' \eta_j'' +$$

$$+ 2 y_i v_j \eta_i'' \zeta_j'' + v_i v_j \zeta_i'' \zeta_j'')\, dx - 2 \int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^{N-1} (y_i \eta_i + v_i \zeta_i)\, dx =$$

$$= \sum_{i,\, j=1}^{N-1} (\alpha_{ij} y_i y_j + 2 \bar{\alpha}_{ij} y_i v_j + \bar{\bar{\alpha}}_{ij} v_i v_j) - 2 \sum_{i=1}^{N-1} (\beta_i y_i + \bar{\beta}_i v_i), \tag{39}$$

où

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_0^1 \eta_i'' \eta_j''\, dx, \quad \bar{\bar{\alpha}}_{ij} = \bar{\bar{\alpha}}_{ji} = \int_0^1 \zeta_i'' \zeta_j''\, dx,$$

$$\bar{\alpha}_{ij} = \int_0^1 \eta_i'' \zeta_j''\, dx, \qquad \beta_i = \int_0^1 f(x)\, \eta_i(x)\, dx, \tag{40}$$

$$\bar{\beta}_i = \int_0^1 f(x)\, \zeta_i(x)\, dx, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

Dérivant (74) par rapport à y_i et v_i, $i = 1, 2, \ldots, N-i$ et égalant à zéro les dérivées obtenues, on déduit le système en y_i et v_i

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N-1} (\alpha_{ij} y_j + \bar{\alpha}_{ij} v_j) - \beta_i = 0, \\ &\sum_{j=1}^{N-1} (\bar{\alpha}_{ji} y_j + \bar{\bar{\alpha}}_{ij} v_j) - \bar{\beta}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{41}$$

Ecrivons ce système sous la forme

$$AU = F,$$

où $U = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ est le vecteur inconnu, $F = \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}$, le vecteur donné, $A \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}' & \bar{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}$ une matrice partitionnée dont les éléments sont les matrices

$$\alpha = (\alpha_{ij}), \quad \bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_{ij}), \quad \bar{\alpha}' = (\bar{\alpha}_{ji}), \quad \bar{\bar{\alpha}} = (\bar{\bar{\alpha}}_{ij}).$$

La matrice transposée s'écrit

$$A' \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}' & \bar{\bar{\alpha}} \end{pmatrix},$$

i.e. la matrice A est symétrique.

Calculons les valeurs des coefficients α_{ij}, $\bar{\alpha}_{ij}$, $\bar{\bar{\alpha}}_{ij}$. De (40), en se servant de l'allure des fonctions $\eta_i^{(x)}$ et $\zeta_i(x)$ et en vertu de (34), (35), on déduit

$$\begin{gathered} \alpha_{i,\,i} = 24/h^3, \quad \bar{\bar{\alpha}}_{ii} = 0, \quad \bar{\bar{\alpha}}_{ii} = 8/h, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \alpha_{i,\,i+1} = \alpha_{i+1,\,i} = -12/h^3, \quad \bar{\alpha}_{i,\,i+1} = 6/h^2, \quad \bar{\alpha}_{i+1,\,i} = -6/h^2, \\ \bar{\bar{\alpha}}_{i,\,i+1} = \bar{\bar{\alpha}}_{i+1,\,i} = 2/h, \quad i = 1, 2, \ldots, N-2, \\ \alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} = \bar{\bar{\alpha}}_{ij} = 0, \quad |i-j| \geqslant 2. \end{gathered}$$

Donc le système (41) peut être mis sous la forme suivante

$$\begin{gathered} l_i(y, v) \equiv 2y_{i-1} - 4y_i + 2y_{i+1} + hv_{i-1} - hv_{i+1} = -\frac{h^3}{6}\beta_i, \\ m_i(y, v) \equiv 3y_{i-1} - 3y_{i+1} + hv_{i-1} + 4hv_i + hv_{i+1} = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_i, \\ i = 2, 3, \ldots, N-2, \\ l_1(y, v) \equiv -4y_1 + 2y_2 - hv_2 = -\frac{h^3}{6}\beta_1, \end{gathered} \tag{42}$$

$$l_{N-1}(y, v) \equiv 2y_{N-2} - 4y_{N-1} + hv_{N-2} = -\frac{h^3}{6}\beta_{N-1},$$

$$m_1(y, v) \equiv -3y_2 + 4hv_1 + hv_2 = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_1,$$

$$m_{N-1}(y, v) \equiv 3y_{N-2} + hv_{N-2} + 4hv_{N-1} = \frac{h^2}{2}\bar{\beta}_{N-1}.$$

Pour faciliter la comparaison du schéma obtenu avec un schéma discret ordinaire, éliminons la fonction v_i de (42). Il est immédiat de vérifier que

$$l_{i-1} + 4l_i + l_{i+1} - m_{i-1} + m_{i+1} \equiv -y_{i-2} + 4y_{i+1} -$$
$$-6y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2} = -\frac{h^3}{6}(\beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1}) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_{i-1} - \bar{\beta}_{i+1}),$$
$$i = 3, 4, \ldots, N-3,$$

$$l_1 + 4l_2 + l_3 - m_1 + m_3 \equiv 4y_1 - 6y_2 + 4y_3 - y_4 =$$
$$= -\frac{h^3}{6}(\beta_1 + 4\beta_2 + \beta_3) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_3),$$

$$7l_1 + 2l_2 - m_1 + 2m_2 \equiv -18y_1 + 9y_2 - 2y_3 =$$
$$= -\frac{h^3}{6}(7\beta_1 + 2\beta_2) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_1 - 2\bar{\beta}_2), \quad (43)$$

$$l_{N-3} + 4l_{N-2} + l_{N-1} - m_{N-3} + m_{N-1} \equiv -y_{N-4} + 4y_{N-3} -$$
$$-6y_{N-2} + 4y_{N-1} = -\frac{h^3}{6}(\beta_{N-3} + 4\beta_{N-2} + \beta_{N-1}) - \frac{h^2}{2}(\bar{\beta}_{N-3} - \bar{\beta}_{N-1}),$$

$$2l_{N-2} + 7l_{N-1} - 2m_{N-2} + m_{N-1} \equiv -2y_{N-3} + 9y_{N-2} - 18y_{N-1}) =$$
$$= -\frac{h^3}{6}(2\beta_{N-2} + 7\beta_{N-1}) - \frac{1}{2}h^2(2\bar{\beta}_{N-2} - \bar{\beta}_{N-1}).$$

En se servant des notations introduites pour les différences, écrivons le système (43) sous forme du schéma discret

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x = 2h, 3h, \ldots, 1-2h,$$
$$y(0) = 0, \quad y_{\bar{x}} - \frac{h}{2}y_{\bar{x}x} + \frac{h^2}{3}y_{\bar{x}x\bar{x}}\big|_{x-h} = \frac{h^3}{4}\varphi(x_1) \quad (44)$$
$$y(1) = 0, \quad y_x + \frac{h}{2}y_{\bar{x}x} + \frac{h^2}{3}y_{\bar{x}x\bar{x}}\big|_{x-1-h} = -\frac{h^3}{4}\varphi(x_{N-1}),$$

où

$$\varphi(x_i) = \frac{1}{6h}\left\{\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} f(x)\left(\frac{x-x_{i-2}}{h}\right)^3 dx + \right.$$

$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\left[-3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 - 6\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 + 4\right]dx +$$

$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\left[3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 - 6\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 + 4\right]dx +$$

$$\left. +\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f(x)\left(\frac{x_{i+2}-x}{h}\right)^3 dx\right\},$$

$$i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N-2, \quad (45')$$

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{9h}\left\{\int_0^h f(x)\left[-11\left(\frac{x}{h}\right)^3 + 18\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]dx + \right.$$

$$+\int_h^{2h} f(x)\left[17\left(\frac{x-2h}{h}\right)^3 - 10\left(\frac{x-h}{h}\right)^3 + 24\left(\frac{x-2h}{h}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left. +12\left(\frac{x-h}{h}\right)^2\right]dx - 2\int_{2h}^{3h} f(x)\left(\frac{x-3h}{h}\right)^3\right\}dx, \quad (45'')$$

$$\varphi(x_{N-1}) = \frac{1}{9h}\left\{2\int_{1-3h}^{1-2h} f(x)\left(\frac{x-1+3h}{h}\right)^3 dx + \right.$$

$$+\int_{1-2h}^{1-h} f(x)\left[10\left(\frac{x-1+h}{h}\right)^3 - 17\left(\frac{x-1+2h}{h}\right)^3 + \right.$$

$$\left. +12\left(\frac{x-1+h}{h}\right)^2 + 24\left(\frac{x-1+2h}{h}\right)^2\right]dx +$$

$$\left. +\int_{1-h}^{1} f(x)\left[11\left(\frac{x-1}{h}\right)^3 + 18\left(\frac{x-1}{h}\right)^2\right]\right\}dx.$$

Si dans la méthode de Ritz on prend les fonctions (36) et (37) pour fonctions coordonnées, le schéma discret s'écrira

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \bar{\varphi}(x), \quad x = 2h,\ 3h,\ \ldots,\ 1-2h,$$

$$y(0) = 0, \quad y_{\bar{x}} - \frac{h}{2}y_{\bar{x}x} + \frac{5h^2}{16}y_{\bar{x}xx}\big|_{x=h} = \frac{7h^3}{16}\bar{\varphi}(h), \quad (46)$$

$$y(1) = 0, \quad y_x + \frac{h}{2}y_{\bar{x}x} + \frac{5h^2}{16}y_{\bar{x}x\bar{x}}\big|_{x=1-h} = -\frac{7h^3}{16}\bar{\varphi}(1-h),$$

où $\bar{\varphi}(x)$ s'obtient par des formules analogues aux formules (45). On vérifie que si la solution du problème (31), (32) est suffisamment dérivable, le schéma discret (44) possède une erreur d'approximation de $O(h^4)$. Le schéma (46) admet, lui, une erreur de $O(h^2)$.

Remarquons que contrairement au problème (41), les schémas (44) et (46) ne sont pas autoconjugués. Cela tient à l'exclusion des inconnues v_i du système (42).

5. Méthode d'approximation d'une fonctionnelle. En construisant par la méthode de Ritz un schéma discret pour une équation du quatrième ordre (problème (31), (32)) nous avons vu que le système d'équations obtenu contenait deux fois plus d'équations (et d'inconnues) que le nombre de nœuds du réseau. Dans l'exemple traité on a réussi à éliminer ces inconnues « excédentaires », mais la matrice du système n'était pas symétrique. La méthode d'approximation de la fonctionnelle qui sera décrite ultérieurement n'a plus ces défauts. Elle opère sur une fonctionnelle variationnelle qu'il faudra minimiser au lieu d'approcher l'espace qui contient ce minimum. Si l'approximation est correctement choisie, cette méthode permet de construire de bons schémas discrets.

Envisageons deux exemples de construction de schémas discrets par la méthode d'approximation d'une fonctionnelle. Premier exemple: construire un schéma discret pour le problème (15), (16). On partira du problème équivalent de recherche de l'élément minimisant la fonctionnelle (17).

Pour élaborer la méthode approchée de minimisation de la fonctionnelle (17), remplaçons les intégrales figurant dans cette dernière par des sommes intégrales, et la dérivée par des différences. Plus exactement, soit $\bar{\omega}$ un réseau régulier sur l'intervalle [0, 1] de pas h. Remplaçons la première intégrale de (17) par la formule des rectangles centraux et les deux intégrales suivantes par la formule des trapèzes. Remplaçons la valeur prise par la dérivée aux points $x_i - 0{,}5\,h$, où x_i sont les nœuds du réseau, par les différences régressives

$$u'(x)\,|_{x=x_i-0,5h} \sim u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}.$$

En définitive on obtient

$$I_h(y) = \sum_{i=1}^{N} k(x_i - 0{,}5h)\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)^2 h + \frac{h}{2}\,(q(0)\,y_0^2 + \\ + q(1)\,y_N^2 - 2f(0)\,y_0 - 2f(1)\,y_N) + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} [q(x_i)\,y_i^2 - 2f(x_i)\,y_i]\,h + \varkappa_0 y_0^2 + \varkappa_1 y_N^2 - 2g_0 y_0 - 2g_1 y_N. \quad (47)$$

$I_h(y)$ est une fonction de $(N+1)$ variables y_i; pour trouver les équations qui en définiront le point de minimum il faut égaler à zéro ses premières dérivées par rapport à y_i. On obtient les équations suivantes pour $i = 1, 2, \ldots, N-1$

$$-\frac{2}{h}k(x_i+0{,}5h)(y_{i+1}-y_i)+\frac{2}{h}k\left(x_i-\frac{h}{2}\right)(y_i-y_{i-1})+$$
$$+2q(x_i)hy_i-2hf(x_i)=0, \quad i=1, 2, \ldots N-1 \tag{48}$$

pour $i=0$ et $i=N$ on obtient respectivement

$$-\frac{2}{h}k\left(\frac{h}{2}\right)(y_1-y_0)+hq(0)y_0-hf(0)+2\varkappa_0 y_0-2g_0=0,$$
$$\frac{2}{h}k\left(1-\frac{h}{2}\right)(y_N-y_{N-1})+hq(1)y_N-hf(1)+2\varkappa_1 y_N-2g_1=0. \tag{49}$$

Multipliant (48) par (-1) et divisant par $2h$, il vient

$$\frac{1}{h}\left[k\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-k\left(x_i-\frac{h}{2}\right)\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]-$$
$$-q(x_i)y_i=-f(x_i) \qquad i=1, 2, \ldots, N-1. \tag{50}$$

Divisons les expressions (49) par 2:

$$k\left(\frac{h}{2}\right)\frac{y_1-y_0}{h}=\left(\varkappa_0+\frac{h}{2}q(0)\right)y_0-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right),$$
$$-k\left(1-\frac{h}{2}\right)\frac{y_N-y_{N-1}}{h}=\left(\varkappa_1+\frac{h}{2}q(1)\right)y_N-\left(g_1+\frac{h}{2}f(1)\right). \tag{51}$$

Il est immédiat de vérifier que le schéma discret (50) est confondu avec le schéma discret (7) construit par la méthode du bilan si les coefficients de (7) sont pris conformément à (9). On constate la même coïncidence de la condition aux limites (14) construite par la méthode du bilan et de la première des conditions aux limites (51).

Deuxième exemple: construction d'un schéma discret pour une équation différentielle ordinaire simple du quatrième ordre avec des *conditions aux limites naturelles*:

$$u^{\mathrm{IV}}+qu=f(x), \qquad 0<x<1, \qquad q=\text{const}$$
$$u''(0)=u'''(0)=u''(1)=u'''(1)=0. \tag{52}$$

Le problème (52) équivaut au problème relatif à la recherche de l'élément $u(x)$ minimisant la fonctionnelle

$$I(u)=\int_0^1((u'')^2+qu^2)\,dx-2\int_0^1 u(x)f(x)\,dx. \tag{53}$$

Cette fois toutes les intégrales seront approchées par la formule des trapèzes, et de plus on se servira des conditions aux limites (52),

i.e. des conditions $u''(0) = u''(1) = 0$, pour approcher l'intégrale de $(u''(x))^2$.

En remplaçant maintenant u'' par les différences secondes $u_{\bar{x}x}$, on obtient l'approximation suivante de la fonctionnelle (53):

$$I_h(y) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}\right)^2 h + \sum_{i=1}^{N-1} (qy_i^2 - 2f(x_i)\, y_i)\, h +$$
$$+ \frac{h}{2}[qy_0^2 + qy_N^2 - 2f(0)\, y_0 - 2f(1)\, y_N].$$

En dérivant $I_h(y)$ par rapport à y_i on obtient les équations discrètes pour la détermination de y_i:

$$\frac{2}{h^3}(y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i) - \frac{4}{h^3}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) +$$
$$+ \frac{2}{h^3}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}) + 2hqy_i - 2hf(x_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, N-2,$$
$$-\frac{4}{h^3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + \frac{2}{h^3}(y_1 - 2y_2 + y_3) + 2h(qy_1 - 2f(h)) = 0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + hqy_0 - hf(0) = 0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_{N-3} - 2y_{N-2} + y_{N-1}) - \frac{4}{h^3}(y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_N) +$$
$$+ 2h(qy_{N-1} - 2hf(1-h)) = 0,$$
$$\frac{2}{h^3}(y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_N) + hqy_N - hf(1) = 0.$$

En multipliant par des expressions convenables et en utilisant les notations introduites précédemment pour les différences, on aura

$$\begin{aligned}
&y_{xx} + \frac{h^2}{2} qy = \frac{h^2}{2} f, \quad x = 0,\\
&y_{xx\bar{x}} - \frac{1}{h} y_{\bar{x}x} + hqy = hf, \quad x = h,\\
&y_{\bar{x}x\bar{x}x} + qy = f, \quad x = 2h, 3h, \ldots, 1-2h,\\
&-y_{\bar{x}\bar{x}x} - \frac{1}{h} y_{\bar{x}x} + hqy + hf, \quad x = 1-h,\\
&y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{h^2}{2} qy = \frac{h^2}{2} f, \quad x = 1.
\end{aligned} \tag{54}$$

Ceci n'est autre que le problème discret approchant le problème (52). Pour s'assurer que l'erreur d'approximation est $O(h^2)$ il est nécessaire de remplacer la deuxième et l'avant-dernière expression par les

combinaisons linéaires de la première et la seconde équation et de l'avant-dernière et la dernière.

Plus exactement, à la place de la seconde on aura :

$$y_{x\bar{x}\bar{x}}(h) + hqy(h) + \frac{h}{2} qy(0) = hf(h) + \frac{h}{2} f(0),$$

et à la place de l'avant-dernière :

$$-y_{\bar{x}x\bar{x}}(1-h) + hqy(1-h) + \frac{h}{2} qy(1) = hf(1-h) + \frac{h}{2} f(1).$$

En utilisant la formule de Taylor, on s'assure maintenant que l'erreur d'approximation du problème (54) est effectivement $O(h^2)$.

6. Méthode de Boubnov-Galerkine. Il existe une autre méthode de projection qui est très voisine de celle de Ritz (2) mais qui possède un plus vaste champ d'applications, c'est la méthode de Boubnov-Galerkine. On peut l'utiliser quand le problème n'est ni autoconjugué ni de signe défini. Etudions cette méthode sur l'exemple suivant :

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)\frac{du}{dx} - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$k(0)u'(0) = \varkappa_0 u(0) - g_0, \quad -k(1)u'(1) = \varkappa_1 u(1) - g_1. \qquad (55)$$

On rappelle (cf. § 2, chapitre 1) que par solution généralisée du problème (55) on entend une fonction $u(x) \in W_2^1[0, 1]$ qui, quel que soit $v(x) \in W_2^1[0, 1]$, vérifie l'identité intégrale

$$\int_0^1 (ku'v' - ru'v + quv - fv)\,dx + \varkappa_0 u(0)v(0) +$$
$$+ \varkappa_1 u(1)v(1) - g_0 v(0) - g_1 v(1) = 0. \qquad (56)$$

Supposons comme précédemment que V_n est une suite de sous-espaces de dimension finie de l'espace $W_2^1[0, 1]$. On cherchera une solution approchée $u_n(x) \in V_n$ du problème (55) en satisfaisant l'identité (56) sur des fonctions $v_n(x) \in V_n$. Soit $\bar{\omega}$ un réseau régulier sur $[0, 1]$ de pas $h = 1/N$, et V_n, l'espace des fonctions continues linéaires par morceaux introduit auparavant, $\eta_i^{(n)}(x)$, les fonctions coordonnées de V_n définies par les expressions (25), (26). Comme précédemment on cherchera une solution approchée $u_{N+1}(x)$ sous la forme

$$u_{N+1}(x) = \sum_{j=0}^{N} y_j \eta_j^{(N+1)}(x).$$

Posant

$$v(x) = \eta_i^{(N+1)}(x)$$

et portant dans (56) l'expression (57) de $u(x)$, on obtient:

$$\sum_{j=0}^{N} \left\{ \int_0^1 \left[k(x)\, y_j \frac{d}{dx} \eta_j^{(N+1)} \frac{d}{dx} \eta_i^{(N+1)} - r(x)\, y_j \frac{d}{dx} \eta_j^{(N+1)} \eta_i^{(N+1)} + \right.\right.$$

$$\left. + q(x)\, y_j \eta_i^{(N+1)} \eta_j^{(N+1)} - f(x)\, \eta_i^{(N+1)} \right] dx + \varkappa_0 y_j \eta_j^{(N+1)}(0)\, \eta_i^{(N+1)}(0) +$$

$$\left. + \varkappa_1 y_j \eta_j^{(N+1)}(1)\, \eta_i^{(N+1)}(1) - g_0 \eta_j^{(N+1)}(0) - g_1 \eta_j^{(N+1)}(1) \right\} = 0.$$

Compte tenu de la forme (25), (26) des fonctions coordonnées, on obtient le système d'équations

$$\begin{gathered} \alpha_{i,\, i-1} y_{i-1} + \alpha_{i,\, i} y_i + \alpha_{i,\, i+1} y_{i+1} - \beta_i = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \\ \alpha_{0,\, 0} y_0 + \alpha_{0,\, 1} y_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_{N,\, N-1} y_{N-1} + \alpha_{N,\, N} y_N - \beta_N = 0, \end{gathered} \tag{58}$$

où

$$\alpha_{i,\, i-1} = h^{-2} \left[-\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})\, r(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)(x - x_{i-1}) q(x)\, dx \right],$$

$$\alpha_{i,\, i} = h^{-2} \left[-\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k(x)\, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})\, r(x)\, dx + \right.$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)\, r(x)\, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x)\, dx +$$

$$\left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x)\, dx \right],$$

$$\alpha_{i,\, i+1} = h^{-2} \left[-\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\, dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)\, r(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x_{i+1} - x)\, q(x)\, dx \right], \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\alpha_{0,\, 0} = h^{-2} \left[\int_0^h k(x)\, dx + \int_0^h (h - x)\, r(x)\, dx + \int_0^h (h - x)^2 q(x)\, dx \right] + \varkappa_0,$$

$$\alpha_{0,1} = h^{-2}\left[-\int_0^h k(x)\,dx - \int_0^h (h-x)\,r(x)\,dx + \int_0^h x(h-x)\,q(x)\,dx\right],$$

$$\alpha_{N,N-1} = h^{-2}\left[-\int_{1-h}^1 k(x)\,dx + \int_{1-h}^1 (x-1+h)\,r(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{1-h}^1 (1-x)(x-1+h)\,q(x)\,dx\right]$$

$$\alpha_{N,N} = h^{-2}\left[\int_{1-h}^1 k(x)\,dx - \int_{1-h}^1 (1-x)\,r(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{1-h}^1 (1-x)^2\,q(x)\,dx\right] + \varkappa_1$$

$$\beta_i = h^{-1}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})\,f(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)\,f(x)\,dx\right],$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\beta_0 = h^{-1}\int_0^h (h-x)\,f(x)\,dx + g_0,$$

$$\beta_1 = h^{-1}\int_{1-h}^h (x-1+h)\,f(x)\,dx + g_1.$$

Avec les notations

$$a_i = h^{-1}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i-x)(x-x_{i-1})\,q(x)\,dx\right]$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

$$d_i = h^{-2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})\,q(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)\,q(x)\,dx\right],$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$b_i^- = h^{-2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})\,r(x)\,dx, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

$$b_i^+ = h^{-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)\,r(x)\,dx, \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1;$$

$$d_0 = 2h^{-2} \int_0^h q(x)(h-x)\,dx,$$

$$d_N = 2h^{-2} \int_{1-h}^1 (x-1+h)\,q(x)\,dx;$$

$$\varphi_i = h^{-1}\beta_i = h^{-2}\Big[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})\,f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)\,f(x)\,dx\Big], \qquad i = 1 = 2, \ldots, N-1,$$

$$\varphi_0 = 2h^{-2} \int_0^h (h-x)\,f(x)\,dx,$$

$$\varphi_N = 2h^{-2} \int_{1-h}^1 (x-1+h)\,f(x)\,dx,$$

le système (58) peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned} &(ay_{\bar x})_x + b^+ y_x + b^- y_{\bar x} - dy = -\varphi, \quad x = h,\ 2h,\ \ldots,\ 1-h, \\ &(a_1 + b_0^+ h)\,y_x = (\varkappa_0 + 0{,}5hd_0)\,y - (g_0 + 0{,}5h\varphi_0), \quad x = 0, \\ &-(a_N - hb_{\bar N})\,y_{\bar x} = (\varkappa_1 + 0{,}5hd_N)\,y - (g_1 + 0{,}5h\varphi_N), \quad x = 1. \end{aligned} \tag{59}$$

Si $r(x) \equiv 0$, il est évident que le problème (59) est entièrement confondu avec le problème (30). Si les coefficients $k(x)$, $g(x)$ et $r(x)$ sont constants, alors a_i, d_i, b_i^- et b_i^+ s'explicitent comme suit:

$$a_i = a = k - \frac{h^2}{6} q, \quad d_i = d = q, \quad b_i^- = b_i^+ = \frac{r}{2}.$$

7. Méthode d'approximation de l'identité intégrale. Cette méthode est à la méthode de Boubnov-Galerkine ce que la méthode d'approximation de la fonctionnelle est à la méthode de Ritz.

Illustrons brièvement la méthode d'approximation de l'identité intégrale sur l'exemple de la construction d'un schéma discret pour le problème (55). Approchons l'identité (56) qui définit la solution généralisée du problème (55) sur le réseau régulier $\bar\omega$ par l'identité

$$\sum_{i=1}^{N} k\left(x_1 - \frac{h}{2}\right)\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h}\right) h +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1}\left[-r(x_i)\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) v_i + q(x_i)\,y_i v_i - f(x_i)\,v_i\right] h +$$

$$+\frac{h}{2}\left[q(0)\,y_0v_0-r(0)\,\frac{y_1-y_0}{h}\,\delta_0-f(0)\,v_0+q(1)\,y_Nv_N-\right.$$

$$\left.-r(1)\,\frac{y_N-y_{N-1}}{h}\,\delta_N-f(1)\,v_N\right]+\varkappa_0y_0v_0+\varkappa_1y_Nv_N-g_0v_0-g_1v_N=0.$$

Dans cette identité, v_i est une fonction discrète arbitraire. En la prenant égale à l'unité dans un nœud et nulle dans les autres, on obtient une équation en un point où v_i est non nul. En considérant ensuite tous les nœuds, on obtient le schéma discret suivant :

$$\left(k\left(x-\frac{h}{2}\right)y_{\bar{x}}\right)_x+r(x)\,y_{\overset{\circ}{x}}-q(x)\,y=-f(x),\quad x\in\omega,$$

$$\left(k\left(\frac{h}{2}\right)+h\,\frac{r(0)}{2}\right)y_x=\left(\varkappa_0+\frac{h}{2}q(0)\right)y-\left(g_0+\frac{h}{2}f(0)\right),\quad x=0,$$

$$-\left(k_{\square}\left(1-\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}r(1)\right)y_{\bar{x}}=\left(\varkappa_1+\frac{h}{2}q(1)\right)y-\left(g_1+\frac{h}{2}f(1)\right),\quad x=1.$$

8. Elévation de l'ordre d'erreur d'approximation sur les solutions des équations approchables. Au § 1 on a cité l'exemple de deux schémas discrets (6) et (7) pour l'équation (5) qui se distinguaient l'un de l'autre par l'approximation du second membre seulement, le premier admettant une erreur de $O(h^2)$, le second, de $O(h^4)$. Décrivons une méthode de construction du schéma (7), § 1. Soit l'équation

$$Lu\equiv u''=-f(x). \tag{60}$$

Ecrivons tout d'abord l'approximation élémentaire

$$L_hy_i=\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}=-\varphi_i,\quad \varphi_i=f(x_i),$$

et calculons son erreur en supposant que $u(x)\in C^{(6)}$. Par définition

$$\psi(x)=L_hu+\varphi,$$

et

$$L_hu=Lu+\frac{h^2}{12}L^2u+O(h^4), \tag{61}$$

donc

$$\psi(x)=\frac{h^2}{12}L^2u+O(h^4). \tag{62}$$

De (60) il vient $L^2u=-Lf$. En portant cette valeur dans (62), on obtient

$$\psi(x)+\frac{h^2}{12}f''(x)=O(h^4). \tag{63}$$

De (63) il résulte que pour composer un schéma discret admettant une erreur d'approximation de $O(h^4)$, il suffit que l'erreur d'approxi-

mation $\bar{\psi}(x)$ de ce schéma soit de la forme

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x) + \frac{h^2}{12} f''(x),$$

où $\psi(x)$ est définie par (62). L'écriture d'un schéma avec une telle erreur d'approximation ne pose en principe pas de difficultés : pour second membre de ce schéma il faut prendre la fonction

$$\bar{\varphi}(x) = f(x) + \frac{h^2}{12} f''(x) \tag{64}$$

et ce schéma sera de la forme

$$L_h y = -\bar{\varphi}(x).$$

Il est clair que sans abaisser l'ordre d'erreur de l'approximation dans (64), on peut remplacer $f''(x)$ par les différences secondes de la fonction $f(x)$, i.e. $f_{\bar{x}x}(x)$, $\bar{\varphi} = f + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}$.

De la même façon, dans le problème (8), § 1 on peut construire l'approximation discrète (10) de la condition aux limites de troisième espèce. On remarquera que cette approximation a été déjà construite par la méthode du bilan. Composons de nouveau l'approximation la plus simple de cette condition :

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h} = \varkappa y_0 - \nu_0, \quad \nu_0 = g_0,$$

et calculons son erreur :

$$\psi_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} - \varkappa u_0 + \nu_0 =$$

$$= u'(0) + \frac{h}{2} u''(0) - \varkappa u(0) + g_0 + O(h^2) = \frac{h}{2} u''(0) + O(h^2).$$

De l'équation (8), § 1 il vient $u''(0) = -f(0)$. Donc

$$\psi_0 + \frac{h}{2} f(0) = O(h^2). \tag{65}$$

De (65) il s'ensuit que pour écrire une approximation discrète avec une erreur de $O(h^2)$ il suffit de choisir le second membre $\bar{\nu}_0$ égal à à $g_0 + \frac{h}{2}\varphi_0$, en posant

$$l_h y = \frac{y_1 - y_0}{h} = \varkappa y_0 - \bar{\nu}_0.$$

Considérons encore deux exemples d'élévation de l'ordre d'erreur d'approximation des schémas (pour équations à coefficients constants). Penchons-nous tout d'abord sur l'équation

$$u'' - qu = -f(x), \tag{66}$$

où $q =$ const. L'approximation la plus simple de cette équation s'écrit

$$L_h y = y_{\bar{x}x} - qy = -\varphi, \quad \varphi = f(x).$$

Son erreur est

$$\psi(x) = L_h u + \varphi =$$

$$= u''(x) + \frac{h^2}{12} u^{\mathrm{IV}}(x) + O(h^4) - qu + f = \frac{h^2}{12} u^{\mathrm{IV}} + O(h^4).$$

De l'équation (66) l'on déduit

$$u^{\mathrm{IV}} = qu''(x) - f''(x) = q^2 u - qf - f''.$$

En portant cette valeur de $u^{\mathrm{IV}}(x)$ dans l'expression de $\psi(x)$, on déduit que

$$\psi(x) - \frac{h^2}{12}(q^2 u - qf - f'') = O(h^4).$$

Comme précédemment il s'ensuit que pour écrire un schéma discret possédant une erreur d'approximation de $O(h^4)$, il suffit que l'erreur d'approximation de ce schéma se mette sous la forme

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{h^2}{12}(q^2 u - qf - f'').$$

Maintenant il ne suffit plus de changer le second membre du schéma il faut changer les coefficients en y. Il est clair que le schéma discret possédant une erreur d'approximation de $O(h^4)$ peut être pris de la forme

$$y_{\bar{x}x} - q\left(1 + \frac{h^2}{12} q\right) y = -\left[f + \frac{h^2}{12}(qf + f'')\right].$$

Considérons enfin l'équation

$$u'' + ru' - qu = -f(x), \tag{67}$$

où $r =$ const et $q =$ const. Cette équation peut être visiblement approchée comme suit :

$$y_{\bar{x}x} + \frac{1}{2} r (y_x + y_{\bar{x}}) - qy = -f.$$

Calculons l'erreur d'approximation de ce schéma :

$$\psi = u'' + \frac{h^2}{12} u^{\mathrm{IV}} + ru' + \frac{h^2}{6} ru''' - qu + f + O(h^4) =$$

$$= \frac{h^2}{12}(u^{\mathrm{IV}} + 2ru''') + O(h^4).$$

L'équation (67) entraîne

$$u''' = (r^2 + q) u' - rqu + rf - f',$$

$$u^{\mathrm{IV}} = -(r^3 + 2rq) u' + (r^2 q + q^2) u + rf' - qf - f'' - r^2 f.$$

En portant les valeurs de u''' et u^{IV} dans ψ, on obtient

$$\psi = \frac{h^2}{12}\left[r^3u' + q(q-r^2)u - (q-r^2)f - rf' - f''\right] + O(h^4) =$$

$$= \frac{h^2}{12}\left[\frac{1}{2}r^3(u_x + u_{\bar{x}}) + q(q-r^2)u - (q-r^2)f - rf' - f''\right] + O(h^4).$$

D'où il résulte que le schéma cherhé doit être de la forme

$$y_{\bar{x}x} + \frac{1}{2}r\left(1 - \frac{h^2}{12}r^2\right)(y_x + y_{\bar{x}}) - q\left(1 + \frac{h^2}{12}(q-r^2)\right)y =$$

$$= -\left[f + \frac{h^2}{12}((q-r^2)f + rf' + f'')\right].$$

9. Schéma d'ordre supérieur de précision pour équations à coefficients variables. Considérons à titre d'exemple l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = -f(x). \tag{68}$$

Pour cette équation on a construit le schéma

$$(ay_{\bar{x}})_x = -\varphi(x), \tag{69}$$

où les coefficients $a(x)$ et $\varphi(x)$ ont été calculés de manière différente selon que la méthode employée était la méthode du bilan, de Ritz ou d'approximation de la fonctionnelle. Dans tous les cas l'erreur d'approximation était de $O(h^2)$.

Du pt. 2 du § 2 il s'ensuit que le schéma (69) admet une approximation du second ordre si

$$\frac{a(x+h)+a(x)}{2} = k(x) + O(h^2), \quad \frac{a(x+h)-a(x)}{h} = k'(x) + O(h^2),$$

$$\varphi(x) = f(x) + O(h^2).$$

Pour l'équation (68) on peut écrire le schéma exact de trois points

$$(\mathring{a}y_{\bar{x}})_x = -\mathring{\varphi}(x), \tag{70}$$

où $\mathring{a}_i = \left(\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}$,

$$\mathring{\varphi}_i = \frac{1}{h^2}\left[\mathring{a}_{i+1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x_i}^{x} f(x')\,dx' + \mathring{a}_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\int\limits_{x}^{x_i} f(x')\,dx'\right].$$

Toute solution de l'équation différentielle (68) est solution de l'équation discrète (70) i.e.

$$y_i = u_i = u(x_i).$$

Pour obtenir un schéma exact, intégrons l'équation (68) entre x_i et x et divisons par $k(x)$:

$$u'(x) = \frac{(ku')_i}{k(x)} + \frac{1}{k(x)} \int_{x_i}^{x} f(x')\,dx'. \tag{71}$$

Intégrons ensuite (71) sur x entre x_{i-1} et x_i et entre x_i et x_{i+1}, puis multiplions par $\overset{\circ}{a}_i h^{-1}$ et $\overset{\circ}{a}_{i+1} h^{-1}$:

$$\overset{\circ}{a}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = (ku')_i + \overset{\circ}{a}_i \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \int_{x_i}^{x} f(x')\,dx',$$

$$\overset{\circ}{a}_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = (ku')_i + \overset{\circ}{a}_{i+1} \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} \int_{x_i}^{x} f(x')\,dx'.$$

Eliminons (ku'). On obtient $(\overset{\circ}{a} u_{\bar{x}})_x = -\overset{\circ}{\varphi}(x)$, où $\overset{\circ}{a}$ et $\overset{\circ}{\varphi}$ sont définis plus haut.

Certes, l'usage de ce schéma est singulièrement compliqué par la présence des intégrales de $\overset{\circ}{a}$ et $\overset{\circ}{\varphi}$, intégrales dont le calcul détermine de toute évidence la précision du schéma.

Pour l'équation du second ordre

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1,$$

on peut construire un schéma homogène de trois points qui est exact sur un réseau irrégulier arbitraire. On se sert d'une autre méthode basée sur le fait que la solution de l'équation du second ordre envisagée peut être exprimée en un point arbitraire au moyen de la valeur prise par cette équation aux extrémités de tout intervalle contenant le point choisi. Si pour les trois points en question on prend des nœuds de réseaux, on obtient le schéma discret

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi,$$

dont les coefficients a, d, φ sont des fonctionnelles des coefficients $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ de l'équation différentielle.

Voyons comment construire un schéma discret $O(h^4)$ pour l'équation (68) en étudiant directement l'erreur d'approximation d'un schéma conservatif. Il est plus commode de mettre l'équation (68) sous la forme

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right) = -f(x), \quad p(x) = \frac{1}{k(x)}. \tag{72}$$

Approchons Lu par l'opérateur de trois points

$$\Lambda y = \left(\frac{1}{a} y_{\bar{x}}\right)_x$$

de deuxième ordre d'approximation

$$\psi = \Lambda u - Lu = O(h^2).$$

On a montré au pt. 2, § 2 que ceci est possible si

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a(x+h)}+\frac{1}{a(x)}\right]=\frac{1}{p(x)}+O(h^2),\\ &\frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(x+h)}-\frac{1}{a(x)}\right]=\left(\frac{1}{p}\right)'+O(h^2). \end{aligned} \tag{73}$$

On supposera que $a(x)$ est défini à l'aide de la fonctionnelle stencil linéaire $A[\bar{p}(s)]$, $-1 \leqslant s \leqslant 0$, de sorte que

$$a(x) = A[p(x+sh)], \quad -1 \leqslant s \leqslant 0.$$

En décomposant

$$p(x+sh) = p(x) + shp'(x) + \frac{h^2}{2}s^2p''(x) + O(h^3)$$

et

$$p(x+h+sh) = p(x) + (1+s)hp'(x) + \frac{h^2}{2}(1+s)^2p''(x) + O(h^3),$$

on trouve

$$a(x) = p(x)A[1] + hp'(x)A[s] + \frac{h^2}{2}p''(x)A[s^2] + O(h^3),$$

$$a(x+h) = p(x)A[1] + hp'(x)A[1+s] + \frac{h^2}{2}p''(x)A[(1+s)^2] + O(h^3).$$

Portons ces expressions dans les conditions (73) de deuxième ordre d'approximation. Il est évident que $A[1] = 1$.

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(x+h)}-\frac{1}{a(x)}\right] &= \frac{1}{hp(x)}\left[\left(1-\frac{hp'}{p}A[1+s]-\frac{h^2}{2p}p''A[(1+s)^2]+\right.\right.\\ &\left.+h^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2A^2[1+s]+O(h^3)\right)-\left(1-\frac{hp'}{p}A[s]-\frac{h^2}{2p}p''A[s^2]+\right.\\ &\left.\left.+h^2\left(\frac{p'}{p}\right)^2A^2[s]+O(h^3)\right)\right]=\\ &=\left(\frac{1}{p}\right)'-\frac{h}{2}\left(\frac{p'}{p^2}\right)'A[1+2s]+O(h^2)=\left(\frac{1}{p}\right)'+O(h^2), \end{aligned}$$

si $A[1+2s] = 0$, i.e. $A[s] = -0{,}5$.

La première des conditions (73) est remplie:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a(x)}+\frac{1}{a(x+h)}\right)=\frac{1}{p(x)}-\frac{hp'}{p^2}A[s+0{,}5]+O(h^2)=\frac{1}{p(x)}+O(h^2).$$

Montrons que si sont réalisées les conditions

$$A[1]=1, \quad A[s]=-1/2, \quad A[s^2]=1/3, \quad A[s^3]=-1/4 \tag{74}$$

l'erreur d'approximation $\psi = \Lambda u - Lu$ peut être représentée par

$$\psi = \Lambda u - Lu = \frac{h^2}{12} L(pLu) + O(h^4) = \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{p}(plu)'\right)' + O(h^4).$$

A ces fins, décomposons $a(x)$ au voisinage du point $\bar{x} = x - 0{,}5h$. En posant $p(\bar{x}) = \bar{p}(x)$, etc., on obtient

$$a(x) = A[p(x+sh)] = A[p(x - 0{,}5h + (s+0{,}5)h)] =$$
$$= A\Big[\bar{p} + h(s+0{,}5)\bar{p}' + \frac{h^2}{2}(s+0{,}5)^2\bar{p}'' + \frac{h^3}{6}(s+0{,}5)^3\bar{p}''' +$$
$$+ \frac{h^4}{24}(s+0{,}5)^4\bar{p}^{\mathrm{IV}} + O(h^5)\Big] = \bar{p} + h\bar{p}'A[s+0{,}5] +$$
$$+ \frac{h^2}{2}\bar{p}''A[(s+0{,}5)^2] + \frac{h^3}{6}\bar{p}'''A[(s+0{,}5)^3] +$$
$$+ \frac{h^4}{24}\bar{p}^{\mathrm{IV}}A[(s+0{,}5)^4] + O(h^5).$$

Comme $A[s+0{,}5] = A[s] + 0{,}5 = 0$,

$$A[(s+0{,}5)^2] = A\left[s^2 + s + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$A[(s+0{,}5)^3] = A[s^3] + \frac{3}{2}A[s^2] + \frac{3}{4}A[s] + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 0,$$

il vient

$$a(x) = \bar{p} + \frac{h^2}{24}\bar{p}'' + \frac{h^4}{24}\bar{p}^{\mathrm{IV}}A[(s+0{,}5)^4] + O(h^5),$$

$$a(x+h) = p(\bar{x}+h) + \frac{h^2}{24}p''(\bar{x}+h) +$$
$$+ \frac{h^4}{24}p^{\mathrm{IV}}(\bar{x}+h)A[(s+0{,}5)^4] + O(h^5).$$

Nous aurons besoin des expressions

$$u(x) = u(\bar{x}) + \frac{h}{2}u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}u''(\bar{x}) + \frac{h^3}{48}u'''(\bar{x}) +$$
$$+ \frac{h^4}{16\cdot 24}u^{\mathrm{IV}}(\bar{x}) + \frac{h^5}{32\cdot 120}u^{\mathrm{V}}(\bar{x}) + O(h^6),$$

$$u(x-h) = u(\bar{x}) - \frac{h}{2}u'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8}u''(\bar{x}) - \frac{h^3}{48}u'''(\bar{x}) +$$
$$+ \frac{h^4}{16\cdot 24}u^{\mathrm{IV}}(\bar{x}) - \frac{h^5}{32\cdot 120}u^{\mathrm{V}}(\bar{x}) + O(h^6).$$

De là il résulte

$$\frac{1}{a}u_{\bar{x}}=\frac{1}{\bar{p}}\left(1-\frac{h^2}{24}\frac{p''(\bar{x})}{p(\bar{x})}+\alpha(\bar{x})h^4\right)\times$$
$$\times\left(u'(\bar{x})+\frac{h^2}{24}u'''(\bar{x})+\beta(\bar{x})h^4\right)+O(h^5)=$$
$$=\left[\frac{u'}{p}+\frac{h^2}{24}\left(\frac{u'''}{p}-\frac{p''}{p^2}u'\right)\right]_{x=\bar{x}}+\gamma(\bar{x})h^4+O(h^5),$$

i.e.

$$\frac{1}{a}u_{\bar{x}}=\left(\frac{u'}{p}\right)_{x=\bar{x}}+h^2\delta(\bar{x})+\gamma(\bar{x})h^4+O(h^5),$$

où

$$\delta(\bar{x})=\frac{1}{24}\left(\frac{u'''}{p}-\frac{p''}{p^2}u'\right)_{x=\bar{x}},$$
$$\gamma(\bar{x})=\frac{\beta(\bar{x})}{p(\bar{x})}+\frac{\alpha(\bar{x})u'(\bar{x})}{p(\bar{x})}-\frac{p''}{576p^2(\bar{x})}u'''(\bar{x}),$$
$$\beta(\bar{x})=\frac{u^{\mathrm{V}}(\bar{x})}{16\cdot 120},$$
$$\alpha(\bar{x})=-\frac{p^{\mathrm{IV}}(\bar{x})}{p(\bar{x})}\frac{A[(s+0,5)^4]}{24}+\frac{(p''(\bar{x}))^2}{576p^2(\bar{x})}.$$

Utilisons maintenant les formules:

$$w(\bar{x})=w(x)-0,5hw'(x)+\frac{h^2}{8}w''(x)-\frac{h^3}{48}w'''(x)+\frac{h^4}{16\cdot 24}w^{\mathrm{IV}}+O(h^5),$$
$$w(\bar{x}+h)=w(x)+0,5hw'(x)+\frac{h^2}{8}w''(x)+\frac{h^3}{48}w'''(x)+$$
$$+\frac{h^4}{16\cdot 24}w^{\mathrm{IV}}(x)+O(h^5),$$
$$(w(\bar{x}))_x=\frac{w(\bar{x}+h)-w(\bar{x})}{h}=w'(x)+\frac{h^2}{24}w'''(x)+O(h^4).$$

De là et de la formule $w=\frac{1}{a}u_{\bar{x}}$ il s'ensuit

$$\left(\frac{1}{a}u_{\bar{x}}\right)_x=w_x=\left(\frac{u'}{p}\right)'+\frac{h^2}{24}\left[\left(\frac{u'}{p}\right)''+\frac{u'''}{p}-\frac{p''}{p^2}u'\right]'+O(h^4).$$

Transformons les crochets en tenant compte du fait que

$$\left(\frac{u'}{p}\right)''=\left(\frac{u''}{p}+u'\left(\frac{1}{p}\right)'\right)'=\frac{u'''}{p}+2\left(\frac{1}{p}\right)'u''+\left(\frac{1}{p}\right)''u',$$
$$\frac{u''}{p}=\left(\frac{u'}{p}\right)'-\left(\frac{1}{p}\right)'u'=\left(\frac{u'}{p}\right)'+\frac{p'}{p^2}u',$$
$$\left(\frac{1}{p}\right)''=-\left(\frac{p'}{p^2}\right)'=-\frac{p''}{p^2}+\frac{2(p')^2}{p^3},$$

donc

$$\left(\frac{u'}{p}\right)''+\frac{u'''}{p}-\frac{p''}{p^2}u'=2\left(\frac{u'}{p}\right)''-\frac{p''}{p^2}u'+\frac{p''}{p^2}u'-2\frac{(p')^2}{p^3}u'+$$
$$+\frac{2p'}{p^2}u''=2\left(\frac{u'}{p}\right)''+2\frac{p'}{p}\left(\frac{u'}{p}\right)'=2\frac{1}{p}\left(p\left(\frac{u'}{p}\right)'\right)'.$$

Nous sommes donc arrivés à l'expression suivante de l'erreur d'approximation

$$\psi=\Lambda u-Lu=\left(\frac{1}{a}u_x\right)_x-\left(\frac{1}{p}u'\right)'=\frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{p}\left(p\left(\frac{u'}{p}\right)'\right)'\right)'+O(h^4),$$

ou

$$\psi=\frac{h^2}{12}L(pLu)+O(h^4).$$

Supposons que $u=u(x)$ est solution de l'équation $Lu=\left(\frac{1}{p}u'\right)'=$ $=-f(x)$. Alors

$$\psi(x)=-\frac{h^2}{12}L(pf)+O(h^4).$$

Comme

$$L(pf)=\left(\frac{1}{p}(pf)'\right)'=\Lambda(pf)+O(h^2),$$

le schéma discret

$$\Lambda y=\left(\frac{1}{a}y_{\bar{x}}\right)_x=-\varphi,\quad \varphi=f+\frac{h^2}{12}\Lambda(pf) \tag{75}$$

possède le quatrième ordre d'approximation sur une solution $u=u(x)$ de l'équation $Lu=-f(x)$, de sorte que

$$\psi=\Lambda u+\varphi=O(h^4),$$

si $f\in C^{(4)}$, $p\in C^{(5)}$ et si sont remplies les conditions (74) pour la fonctionnelle linéaire

$$A[\bar{p}(s)],\quad -1\leqslant s\leqslant 0.$$

Considérons la fonctionnelle élémentaire

$$A[\bar{p}(s)]=c_1\bar{p}(-1)+c_2p\left(-\frac{1}{2}\right)+c_0\bar{p}(0),$$

où c_1, c_2, c_0 sont des constantes. Les conditions (74) donnent

$$A[1]=c_1+c_2+c_0=1,\quad c_2=1-c_0-c_1,$$
$$A[s]=-c_1-0{,}5c_2=-0{,}5\quad c_1+0{,}5c_2=0{,}5,$$
$$A[s^2]=c_1+\frac{1}{4}c_2=\frac{1}{3}.$$

D'où il vient

$$c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_0 = \frac{1}{6}.$$

La condition $A[s^3] = -\frac{1}{4}$ est automatiquement réalisée.

Donc, dans le schéma élémentaire du quatrième ordre d'approximation (75), le coefficient a_i est égal à

$$a_i = \frac{1}{6}(p_{i-1} + 4p_{i-1/2} + p_i).$$

Voir aussi [11], [7], [2], [6], [9].

CHAPITRE III

SCHÉMAS DISCRETS POUR L'ÉQUATION DE POISSON. PRINCIPE DU MAXIMUM

On a déjà mentionné au chapitre I que l'équation de Poisson (Laplace) était l'un des plus typiques représentants des équations elliptiques. Dans ce chapitre on se propose de construire des schémas discrets de divers ordres d'approximation pour l'équation de Poisson, en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Ensuite on abordera les approximations des conditions aux limites de Dirichlet pour l'équation de Laplace, puis on démontrera le principe du maximum que l'on utilisera pour étudier la solubilité et la vitesse de convergence des schémas discrets construits.

§ 1. Construction de schémas discrets pour l'équation de Poisson

1. Approximation de l'équation de Poisson en coordonnées cartésiennes. Soit donnée dans le plan Ox_1x_2 l'équation de Poisson

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \tag{1}$$

et un réseau Ω, régulier, rectangulaire, de pas $h\alpha$ suivant la direction Ox_α, $\alpha = 1, 2$. Au § 1, chapitre II, on a indiqué une approximation discrète simple pour l'opérateur de Laplace sur un réseau rectangulaire. Si l'on se sert de l'opérateur discret qui a été alors défini, on obtient de toute évidence l'approximation simple pour l'équation (1)

$$\Lambda y \equiv y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \tag{2}$$

où le second membre $\varphi(x)$ peut être choisi, par exemple, de la manière suivante:

$$\varphi(x) = f(x). \tag{3}$$

Calculons l'erreur d'approximation de l'équation (2) avec le second membre (3) sur la solution $u = u(x)$ de l'équation (1). Comme

$$\Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} + \frac{h_\alpha^4}{360}\frac{\partial^6 u}{\partial x_\alpha^6} + O(h_\alpha^6), \tag{4}$$

en introduisant les notations

$$\Delta u = (L_1 + L_2) u = -f(x), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

il vient

$$\psi(x) = \Lambda u + \varphi(x) = (\Lambda_1 + \Lambda_2) u + \varphi(x) =$$
$$= (L_1 + L_2) u + \frac{1}{12} (h_1^2 L_1^2 u + h_2^2 L_2^2 u) + f(x) + O(|h|^4) = O(|h|^2),$$
$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Donc l'équation (2) avec le second membre (3) approche l'équation (1) au deuxième ordre.

L'opérateur discret utilisé pour la description de l'équation (2) est défini sur un stencil simple de cinq points du type « croix ». On montre que sur ce stencil il est impossible de construire une approximation discrète dont l'erreur soit d'un ordre supérieur à $O(|h|^2)$. La complication du stencil permet de construire des approximations d'ordre plus élevé. Ainsi, sur un stencil de neuf points du type « tiroir » on peut construire une approximation discrète de l'équation (1) d'ordre $O(|h|^4)$. Si le réseau est carré, i.e. $h_1 = h_2 = h$, on peut construire une approximation $O(|h|^6)$ sur ce stencil. Construisons les approximations indiquées. De (4) il s'ensuit

$$\Lambda u = (L_1 + L_2) u + \frac{1}{12} (h_1^2 L_1^2 + h_2^2 L_2^2) u + O(|h|^4) = (L_1 + L_2) u +$$
$$+ \frac{1}{12} (h_1^2 L_1 + h_2^2 L_2) (L_1 + L_2) u - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4). \qquad (5)$$

En portant $\Delta u = (L_1 + L_2) u = -f(x)$ de (1) dans (5), on obtient

$$\Lambda u = -f(x) - \frac{1}{12} (h_1^3 L_1 + h_2^2 L_2) f - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4).$$

Remplaçons $L_1 L_2 u = \partial^4 u / \partial x_1^2 \partial x_2^2$ par l'expression discrète

$$L_1 L_2 u = u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + O(|h|^2) = \Lambda_1 \Lambda_2 u + O(|h|^2).$$

On a en définitive

$$\Lambda u + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 u = -\left(f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha f \right) + O(|h|^4).$$

D'où il résulte que l'équation discrète

$$\Lambda' y \equiv \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x) \qquad (6)$$

de second membre

$$\varphi(x) \equiv f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} \qquad (7)$$

approche l'équation (1) sur sa solution $u = u(x)$ à $O(|h|^4)$ près.

La formule (7) qui définit le second membre de l'équation (6) n'est pas toujours commode pour les calculs, car elle fait appel aux dérivées de la fonction $f(x)$. Mais ces dérivées peuvent être remplacées par leurs approximations discrètes. Comme

$$\partial^2 f/\partial x_\alpha^2 = f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + O(h_\alpha^2),$$

on posera le second membre de l'équation (6) égal à

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{h_\alpha^2}{12} f_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = f(x) + \frac{1}{12}(h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f). \qquad (7')$$

L'erreur d'approximation du schéma sera comme précédemment du quatrième ordre, i.e. $\psi = O(|h|^4)$.

Construisons maintenant un schéma possédant un sixième ordre d'approximation sur un réseau carré, i.e. $h_1 = h_2 = h$.

En se servant du développement (5), on obtient

$$\Lambda u = \Lambda_1 u + \Lambda_2 u =$$
$$= (L_1 + L_2) u + \frac{h^2}{12}(L_1^2 + L_2^2) u + \frac{h^4}{360}(L_1^3 + L_2^3) u + O(h^6).$$

En vertu de l'équation $(L_1 + L_2) u = -f(x)$ et des expressions

$$(L_1^2 + L_2^2) u = (L_1 + L_2)^2 u - 2L_1 L_2 u = -(L_1 + L_2) f - 2L_1 L_2 u,$$
$$(L_1^3 + L_2^3) u = (L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2)(L_1 + L_2) u = -(L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2) f,$$

on peut mettre la formule précédente sous la forme

$$\Lambda u = -f(x) - \frac{h^2}{12}(L_1 + L_2) f - \frac{h^4}{360}(L_1^2 - L_1 L_2 + L_2^2) f -$$
$$- \frac{h^2}{6} L_1 L_2 u + O(h^6).$$

Pour remplacer $L_1 L_2 u$ par son analogue discret à $O(h^6)$ près on tiendra compte de (4). On obtient en définitive

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u = L_1 L_2 u + \frac{h^2}{12} L_1 L_2 (L_1 + L_2) u + O(h^4) =$$
$$= L_1 L_2 u - \frac{h^2}{12} L_1 L_2 f + O(h^4).$$

On peut donc écrire

$$\Lambda' u = \Lambda u + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 u = -\varphi(x) + O(h^6),$$

où

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{12} \Delta f + \frac{h^4}{360}(\Delta^2 f + 2L_1 L_2 f). \qquad (8)$$

D'où il vient que le schéma

$$\Lambda' y = -\varphi(x) \tag{9}$$

de second membre $\varphi(x)$ défini par la formule (8) approche l'équation (1) avec une erreur de $O(h^6)$ sur le réseau carré.

Pour second membre de (9) on peut prendre une autre fonction qui conserve l'ordre d'approximation du schéma, mais ne renferme pas de dérivées de la fonction $f(x)$. En portant dans (8) les expressions

$$\Delta f = \Lambda f - \frac{h^2}{12}(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) f + O(h^4),$$

$$\Delta^2 f = (\Lambda_1 + \Lambda_2)^2 f + O(h^2) = \Lambda_1^2 f + 2\Lambda_1\Lambda_2 f + \Lambda_2^2 f + O(h^2),$$

$$L_1 L_2 f = \Lambda_1\Lambda_2 f + O(h^2)$$

et en ne conservant que les termes $O(h^4)$, on obtient la formule suivante pour le second membre $\varphi(x)$ de l'équation (9)

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12}(\Lambda_1 + \Lambda_2) f - \frac{h^4}{240}(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) f + \frac{h^4}{90}\Lambda_1\Lambda_2 f. \tag{8'}$$

La formule (8') est susceptible d'être plus commode aux calculs.

Parfois, sur un réseau carré l'équation (1) est approchée suivant un stencil de cinq points en « croix De Saint-André », constitué des nœuds

$$(x_1, x_2),\ (x_1 - h, x_2 - h),\ (x_1 - h, x_2 + h),\ (x_1 + h, x_2 + h),$$
$$(x_1 + h, x_2 - h).$$

Cette approximation se fait de la manière suivante. On sait que l'opérateur de Laplace est invariant par une rotation du système de coordonnées. Faisons tourner le système initial de coordonnées d'un angle de $\pi/4$, et laissons le réseau Ω en place. Dans le nouveau système de coordonnées, le stencil restera toujours en « croix », seule la distance de deux nœuds voisins changera, elle ne sera plus de h, mais de $\sqrt{2}h$. Donc, sur ce stencil la nouvelle équation pourra être approchée de façon ordinaire et dans l'ancien système de coordonnées cette approximation s'écrit

$$\frac{1}{2h^2}\{y(x_1 - h, x_2 - h) + y(x_1 - h, x_2 + h) + y(x_1 + h, x_2 - h) +$$
$$+ y(x_1 + h, x_2 + h) - 4y(x_1, x_2)\} = -f(x_1, x_2). \tag{10}$$

En utilisant les notations du § 1, chapitre II, on met l'équation (10) sous la forme

$$y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h^2}{2} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \frac{h^2}{2}\Lambda_1\Lambda_2 y = -f(x). \tag{11}$$

Il est évident que l'erreur d'approximation de l'équation (11) est de l'ordre de $O(h^2)$.

2. Réseaux hexagonaux et triangulaires. En dehors des réseaux rectangulaires et carrés, pour approcher l'équation de Poisson on

utilise parfois des réseaux réguliers composés de triangles équilatéraux (fig. 6) ou d'hexagones réguliers (fig. 7) de côté h.

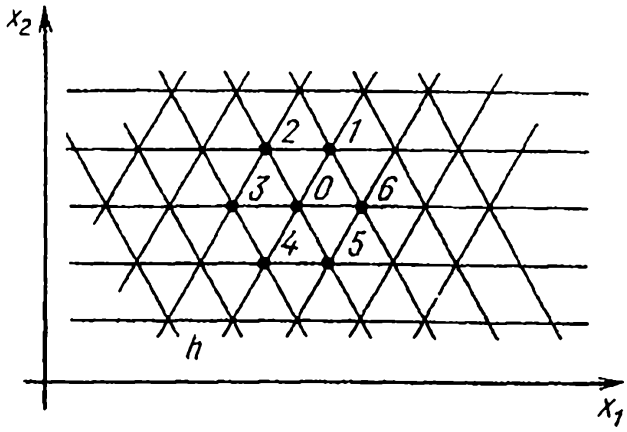


Fig. 6

Construisons les approximations discrètes de l'équation (1) sur ces réseaux. Signalons préalablement qu'il est impossible d'approcher l'équation (1) sur un réseau hexagonal en approchant les dérivées figurant dans (1), car l'approximation de la deuxième dérivée suivant une direction quelconque implique l'existence d'au moins trois points situés sur une droite parallèle à cette direction. Nous n'utiliserons pas non plus cette approche pour construire un schéma sur un réseau triangulaire.

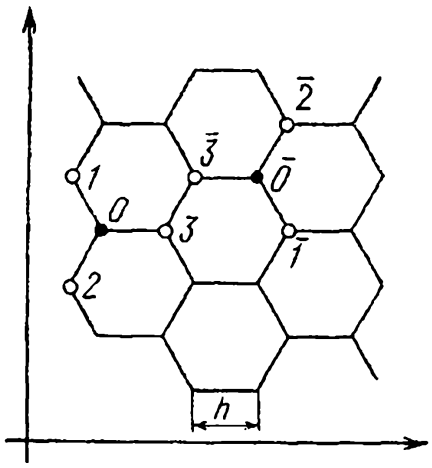


Fig. 7

Soit $x^{(0)}$ un nœud d'un réseau, $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ses nœuds voisins. Soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$ les droites joignant $x^{(0)}$ respectivement aux nœuds $x^{(i)}$. Désignons par $\theta_i = \theta + 2\pi i/n$, où θ est l'angle de référence, l'angle de l_i avec l'axe x_1. Introduisons les différences progressives suivant l_1 :

$$y_{l_i} = \frac{y(x^{(i)}) - y(x^{(0)})}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

et construisons l'opérateur

$$\mathcal{L}y = \sum_{i=1}^{n} y_{l_i}. \tag{12}$$

Etudions son asymptotique lorsque $h \to 0$. Il est évident que

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial l_i} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial l_i^3} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial l_i^4} + \frac{h^4}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial l_i^5} \right) + O(h^5). \tag{13}$$

Exprimons les dérivées suivant la direction de l_i, figurant dans (13); au moyen des dérivées par rapport à x_1 et x_2. Tous calculs faits on obtient

$$\frac{\partial}{\partial l_i} = \cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial l_i^2} = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\cos 2\theta_i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \sin 2\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial l_i^3} = \frac{\cos 3\theta_i}{4}\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + \frac{\sin 3\theta_i}{4}\left(3\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\right) + \\ + \frac{3}{4}\left(\cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Delta,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial l_i^4} = \frac{3}{8}\Delta^2 + \frac{\cos 4\theta_i}{8}\left(\Delta^2 - 8\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right) + \frac{\sin 4\theta_i}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3}\right) + \\ + \frac{\cos 2\theta_i}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right) + \sin 2\theta_i \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^5}{\partial l_i^5} = \frac{5}{8}\left(\cos\theta_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_i \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Delta^2 + \frac{5\cos 3\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_1^5} - \right. \\ \left. - 2\frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} - 3\frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^4}\right) - \frac{5\sin 3\theta_i}{16} \times \\ \times \left(-3\frac{\partial^5}{\partial x_1^4 \partial x_2} - 2\frac{\partial^5}{\partial x_1^2 \partial x_2^3} + \frac{\partial^5}{\partial x_2^5}\right) + \frac{\cos 5\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_1^5} + 5\frac{\partial^5}{\partial x_1 \partial x_2^4} - 10\frac{\partial^5}{\partial x_1^3 \partial x_2^2}\right) + \\ + \frac{\sin 5\theta_i}{16}\left(\frac{\partial^5}{\partial x_2^5} + 5\frac{\partial^5}{\partial x_1^4 \partial x_2} - 10\frac{\partial^5}{\partial x_1^2 \partial x_2^3}\right).$$

Portant les expressions (14) dans (13) et compte tenu de

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha\theta_i = \cos\alpha\left(\theta + \frac{n+1}{n}\pi\right) \times \\ \times \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi/n)} & \text{pour } \dfrac{\alpha}{n} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ (-1)^{\alpha(n+1)/n} n & \text{pour } \dfrac{\alpha}{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases} \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha\theta_i = \sin\alpha\left(\theta + \frac{n-3}{n}\pi\right) \times \\ \times \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi/n)} & \text{pour } \dfrac{\alpha}{n} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ (-1)^{\alpha(n-1)/n} n & \text{pour } \dfrac{\alpha}{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{16}$$

on obtient (pour $n \geqslant 3$)

$$\mathscr{L}u = \frac{nh}{4}\Delta u + \frac{nh^3}{64}\Delta^2 u +$$
$$+ \delta_{n,3}\frac{h^2}{8}\left\{\cos 3\theta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + \sin 3\theta\left(3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right)\right\} -$$
$$- \delta_{n,4}\frac{h^3}{48}\left\{\left(\Delta^2 u - 8\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right)\cos 4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) +\right.$$
$$\left. + 16\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3}\right)\sin 4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right\} +$$
$$+ (\delta_{n,5} + \delta_{n,3})\, O(h^4) + O(h^5), \tag{17}$$

où $\delta_{n,l}$ est le symbole de Kronecker. De (17) il résulte que l'opérateur $\mathscr{L}$ approchera l'opérateur de Laplace quel que soit $n \geqslant 3$ s'il est multiplié par $4/(nh)$. Posons

$$\Lambda = \frac{4}{nh}\mathscr{L}. \tag{18}$$

Sur un réseau triangulaire ($n = 6$) l'équation discrète

$$\Lambda y = -\varphi(x), \tag{19}$$

où

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{16}\Delta f, \tag{20}$$

approche l'équation (1) à $O(h^4)$ près ainsi qu'il découle de (17). Sur un réseau hexagonal, l'équation

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad \varphi(x) = f(x) \tag{21}$$

(nous n'explicitons pas Λy) approche l'équation (1) à $O(h)$ près, et comme sur ce réseau il existe deux stencils correspondant à $\theta = 0$ et $0 = \pi$, il vient

$$\psi(x^{(0)}) = \frac{h}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + O(h^2),$$
$$\psi(\bar{x}^{(0)}) = -\frac{h}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) + O(h^2).$$

3. Opérateur discret de Laplace sur un réseau irrégulier. Considérons encore un exemple d'approximation de l'équation $\Delta u = -f$. Soit un réseau irrégulier arbitraire sur le plan Ox_1x_2 :

$$\Omega = \{(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha = 1, 2\}.$$

Le pas du réseau suivant la direction x_α est égal à

$$h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}$$

et ne dépend que de i_α ; le pas moyen du réseau suivant cette direction est

$$\hbar_\alpha = \hbar_\alpha^{(i_\alpha)} = \frac{1}{2}(h_\alpha + h_\alpha^+), \quad \text{où} \quad h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)}, \quad h_\alpha^+ = h_\alpha^{(i_\alpha+1)}.$$

Les dérivées figurant dans l'équation (1) seront approchées par des expressions du type (3) § 1, chap. II :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \sim \frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{u^{(+1_\alpha)} - u}{h_\alpha^+} - \frac{u - u^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right) = u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

où

$$u^{(\pm 1_1)} = u(x_1^{(i_1 \pm 1)}, x_2^{(i_2)}), \quad u^{(\pm i_2)} = u(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2 \pm 1)}).$$

L'équation discrète qui approche l'équation de Poisson $\Delta u = -f$ sur le réseau irrégulier Ω, s'écrit :

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_2} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -f(x), \quad x \in \Omega \tag{22}$$

L'erreur d'approximation

$$\psi = \Lambda u + f = u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + u_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} + f(x),$$

où u, solution de l'équation $\Delta u + f = 0$, peut se mettre sous la forme

$$\psi = (\Delta u + f) + \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2).$$

En effet, en développant $u^{(\pm 1_\alpha)}$ suivant les puissances de h_α et $\hbar_\alpha^+$ au voisinage du nœud $x = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, on aura

$$u_{x_\alpha} = \frac{u^{(+1_\alpha)} - u}{h_\alpha^+} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^+}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{(h_\alpha^+)^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O((h_\alpha^+)^3),$$

$$u_{\bar{x}_\alpha} = \frac{u - u^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O(h_\alpha^3),$$

donc

$$u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha}(u_{x_\alpha} - u_{\bar{x}_\alpha}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{6\hbar_\alpha}((h_\alpha^+)^2 - h_\alpha^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + O(\hbar_\alpha^2).$$

En portant ici l'expression

$$(h_\alpha^+)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} = (h_\alpha^+)^2\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)^{(+1_\alpha)} + O(h_\alpha^+)\right],$$

il vient

$$u_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{6}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(\hbar_\alpha^2).$$

4. Approximation de l'équation de Poisson en coordonnées polaires. Si l'on recherche la solution de l'équation de Poisson (1) sur un cercle, une couronne, un secteur circulaire ou annulaire, il semble plus naturel d'approcher cette équation sur un réseau en coordonnées polaires. En coordonnées polaires (r, φ), l'équation (1) s'écrit

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \varphi), \tag{23}$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{x_1}$, le plan Ox_1x_2 est appliqué sur la demi-bande $\{0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$.

Les coefficients de l'équation (23) présentent une singularité pour $r = 0$, donc pour trouver la solution qui nous intéresse il nous faut poser quelques conditions. D'habitude on s'intéresse aux solutions bornées pour $r = 0$, lesquelles vérifient la condition

$$\lim_{r \to 0} r\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{24}$$

Donc, outre l'équation (23) il nous faudra approcher la condition (24). Pour exploiter au maximum la condition (24) il nous faut choisir un réseau spécial. Plus exactement envisageons le réseau régulier en φ de pas h_φ

$$\omega_\varphi = \{\varphi_m = mh_\varphi,\ m = 0, 1, \ldots, M-1,\ h_\varphi = 2\pi/M\},$$

et le réseau régulier en r de pas h_r, translaté d'un demi-pas

$$\omega_r = \{r_n = (n + 0{,}5)\, h_r,\ n = 0, 1, 2, \ldots,,\ h_r > 0\}.$$

Dans la demi-bande, le réseau sera de la forme

$$\Omega = \omega_r \times \omega_\varphi = \{(r_n, \varphi_m) \mid r_n \in \omega_r,\ \varphi_m \in \omega_\varphi\}.$$

En éliminant les points de coordonnée $r = 0$ du réseau, on s'est dispensé d'approximer l'équation pour $r = 0$, mais on a posé un nouveau problème : l'approximation de l'équation (23) pour $r = h_r/2$. Si on avait introduit un réseau régulier fixe en r et si parmi les nœuds on avait eu des points de coordonnée $r = 0$, pour écrire l'équation avec $r = 0$ il nous aurait fallu nous servir de l'écriture cartésienne de (1) et de l'opérateur (18), (12) avec $h = h_r$ et $n = M$, i.e. l'équation discrète aurait contenu $M + 1$ inconnues, ce qui n'est pas très commode pour la réalisation du schéma.

L'approximation de l'équation (23) sur le réseau avec $r \neq 0{,}5\, h_r$ ne pose pas de difficultés ; plus exactement l'opérateur L_φ est approché de toute évidence par

$$L_\varphi v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \sim \Lambda_\varphi v = \frac{1}{r^2} v_{\bar{\varphi}\varphi}, \tag{25}$$

quant à l'opérateur L_r il est approché comme un opérateur à coefficients variables (cf. § 3, chapitre II)

$$L_r v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) \sim \Lambda_r v = \frac{1}{r}(\rho v_r)_r,$$

où $\rho(r) = r - h_r/2$. Donc l'approximation de l'équation (23) pour $r \neq h_r/2$ peut être prise sous la forme suivante :

$$\Lambda y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r + \frac{1}{r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi} = -f(r, \varphi), \quad r \neq \frac{h_r}{2}, \tag{26}$$

$\Lambda = \Lambda_r + \Lambda_\varphi$.

Utilisons la méthode du bilan pour déduire les équations discrètes pour $r = h_r/2$. Multiplions l'équation (23) par r et intégrons-la sur r entre ε et h_r et sur φ entre $\varphi_m - h_\varphi/2$ et $\varphi_m + h_\varphi/2$. En tenant compte de la condition (24) et en passant à la limite pour $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$h_r \int\limits_{\varphi_m - h_\varphi/2}^{\varphi_m + h_\varphi/2} \frac{\partial u}{\partial r}(h_r, \varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \int\limits_0^{h_r} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(r, \varphi_m + \frac{h_\varphi}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(r, \varphi_m - \frac{h_\varphi}{2}\right)\right] dr +$$

$$+ \int\limits_0^{h_r} r\, dr \int\limits_{\varphi_m - h_\varphi/2}^{\varphi_m + h_\varphi/2} f(r, \varphi)\, d\varphi = 0. \tag{27}$$

En approchant maintenant chaque intégrale de (27) par la formule des rectangles centraux, on obtient

$$h_r h_\varphi \frac{\partial u}{\partial r}(h_r, \varphi_m) + 2\left[\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m + \frac{h_\varphi}{2}\right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m - \frac{h_\varphi}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{h_r^2 h_\varphi}{2} f\left(\frac{h_r}{2}, \varphi_m\right) \approx 0.$$

Pour obtenir l'équation discrète au nœud $(0{,}5\, h_r, \varphi_m)$ remplaçons les dérivées qui figurent dans cette expression respectivement par les différences

$$h_r h_\varphi y_r(r_0, \varphi_m) + 2h_\varphi y_{\bar{\varphi}\varphi}(r_0, \varphi_m) + \frac{h_r^2 h_\varphi}{2} f(r_0, \varphi_m) = 0,$$

où

$$y_r(r_0, \varphi_m) = \frac{1}{h_r}[y(r_0 + h_r, \varphi_m) - y(r_0, \varphi_m)].$$

D'où il vient par division par $0{,}5 h_r^2 h_\varphi$

$$\frac{2}{h_r} y_r(r_0, \varphi_m) + \frac{4}{h_r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi}(r_0, \varphi_m) = -f(r_0, \varphi_m) \quad \text{pour} \quad r_0 = h_r/2.$$

En portant ici $h_r = 2r_0$ et comme $\rho^{(+1r)}(r_0) = r_1 - h_r/2 = h_r$, on obtient l'équation

$$\frac{1}{rh_r}\rho^{(+1r)}y_r + \frac{1}{r^2}y_{\varphi\varphi} = -f(r, \varphi) \quad \text{pour} \quad r = r_0 = h_r/2. \tag{28}$$

On a donc construit l'approximation de l'équation (23) en tous les nœuds du réseau Ω. A noter que l'équation (28) découle en fait de l'équation (26) si l'on pose dans la dernière $r = h_r/2$.

En effet comme

$$\Lambda_r y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar r})_r\Big|_{r=h_r/2} = \frac{1}{rh_r}(\rho^{(+1r)}y_r - \rho y_{\bar r})\Big|_{r=h_r/2},$$

et que $\rho(h_r/2) = 0$, on peut considérer que l'équation (26) est donnée en tous les nœuds (r_n, φ_m) du réseau Ω pour $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant m \leqslant M - 1$. Introduisons la notation suivante:

$$\bar\Lambda_r v = \begin{cases} \dfrac{1}{r}(\rho v_{\bar r})_r & \text{pour} \quad r \neq h_r/2, \\ \dfrac{1}{rh_r}\rho^{(+1r)}v_r & \text{pour} \quad r = h_r/2\,(n = 0). \end{cases} \tag{29}$$

Donc, compte tenu des formules (26), (28), (29) l'approximation de l'équation (23) sur tout le réseau Ω s'écrit

$$\bar\Lambda y = \bar\Lambda_r y + \Lambda_\varphi y = -f(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega. \tag{30}$$

Calculons l'erreur d'approximation de l'équation discrète (30). Il est évident que

$$\Lambda_\varphi u \equiv \frac{1}{r^2}u_{\bar\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_m} + \frac{h_\varphi^2}{12r^2}\frac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial\varphi^4},$$

où

$$\frac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial\varphi^4} = \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}u(\tilde\varphi, r), \quad \tilde\varphi \in [\varphi_{m-1}, \varphi_{m+1}].$$

Détaillons le calcul de l'erreur d'approximation de l'opérateur Λ_r. Développons $u^{(\pm 1r)}$ suivant les puissances de h_r

$$u(r_n + h_r, \varphi_m) = u(r_{n+1}, \varphi_m) =$$

$$= \left(u + h_r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^3} + \frac{h_r^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^4}{24}\frac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial r^4},$$

$$u(r_n - h_r, \varphi_m) = u(r_{n-1}, \varphi_m) =$$

$$= \left(u - h_r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{h_r^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^4}{24}\frac{\widetilde{\widetilde{\partial^4 u}}}{\partial r^4},$$

où

$$\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(\bar{r}_n, \varphi_m), \quad \bar{r}_n \in [r_n, r_{n+1}],$$

$$\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(\bar{\bar{r}}_n, \varphi_m), \quad \bar{\bar{r}}_n \in [r_{n-1}, r_n].$$

Il s'ensuit que

$$u_r = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} h_r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{6} h_r^2 \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^3}{24} \overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},$$

$$u_{\bar{r}} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2} h_r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{6} h_r^2 \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right) - \frac{h_r^3}{24} \overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}.$$

Comme $\rho(r_n) = r_n - 0{,}5h_r$, $\rho^{(+1r)} = \rho(r_{n+1}) = r_n + 0{,}5h_r$, on obtient

$$\Lambda_r u = \frac{1}{r}(\rho u_{\bar{r}})_r = \frac{1}{rh_r}(\rho^{(+1r)} u_r - \rho u_{\bar{r}}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) +$$

$$+ \frac{h_r^2}{6r}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}(r + 0{,}5h_r)\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} + \frac{1}{4}(r - 0{,}5h_r)\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\right],$$

de sorte que

$$\psi(r_n, \varphi_m) = (\Delta_{r,\varphi} u + f)_{r=r_n,\, \varphi=\varphi_m} +$$

$$+ \frac{h_r^2}{6r}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{r + 0{,}5h_r}{4}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} + \frac{r - 0{,}5h_r}{4}\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\right]_{r=r_n} + \frac{h_\varphi^2}{12r^2}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}}. \quad (31)$$

Pour $r = r_0 = 0{,}5h_r$, on obtient

$$\Lambda_r u = \frac{1}{rh_r}\rho^{(+1r)} u_r = \frac{h_r}{rh_r} u_r, \quad \text{puisque} \quad \rho^{(+1r)} = h_r.$$

En portant ici

$$u_r|_{r=0,5h_r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^3}{24}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}},$$

on obtient

$$\Lambda_r u = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=0,5h_r} + \frac{h_r^3}{24r}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}.$$

On remarquera que dans le développement (31), on n'a nulle part utilisé la condition (24), de sorte que (31) reste valable pour le cas également où la condition (24) est violée. Bien plus, si les équations (30) sont données, et que l'on fasse abstraction de leurs procédés de construction pour $r = 0{,}5\,h_r$, on ne se sert pas explicitement de la condition (24). C'est pourquoi on peut avoir l'impression que (30) approche l'équation (23) sans la condition (24), ce qui bien entendu

n'est pas le cas. Si l'on s'affranchit de la condition (24), la solution de l'équation (23) pour $r = 0$ admettra une singularité qui dans le meilleur des cas sera du type $\ln(1/r)$. En portant une telle solution dans (31), on constate que pour $r = O(h_r)$

$$\psi(r, \varphi) = O(1/h_r^2),$$

i.e. il n'y a en fait pas d'approximation. Si l'on suppose que la condition (24) est remplie, cella nous garantit que pour $r = 0$ la solution est non seulement bornée mais elle est aussi suffisamment différentiable (pourvu que le second membre $f(r, \varphi)$ le soit).

Etudions l'erreur d'approximation (31) dans l'hypothèse que la solution de l'équation (1) admet des dérivées quatrièmes bornées en les variables cartésiennes x_1, x_2. Ceci n'est possible que si est remplie la condition (24). Assurons-nous que les dérivées par rapport à r et φ sont des combinaisons linéaires des dérivées par rapport à x_1 et x_2, à coefficients bornés. A ces fins exprimons les dérivées par rapport à r et φ au moyen des dérivées par rapport à x_1 et x_2. Comme $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $\frac{dx_2}{dr} = \cos\varphi$, $\frac{dx_2}{dr} = \sin\varphi$ et que

$$\frac{\partial x_1}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi = -x_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial\varphi} = r\cos\varphi = x_1,$$

il vient

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\sin 2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\sin^2\varphi.$$

On remarque que les dérivées $\partial^3 u/\partial r^3$ et $\partial^4 u/\partial r^4$ s'expriment linéairement en fonction des dérivées du même ordre par rapport à x_1 et x_2 et que les coefficients sont bornés. Donc, ces dérivées sont bornées:

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right| \leqslant M, \quad M = \text{const} > 0. \tag{32}$$

De façon analogue

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = -x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial u}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2x_1x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} - x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}, \text{ etc.}$$

Il est évident que $\partial^k u/\partial\varphi^k$, $k \geqslant 1$, est un polynôme de degré k en x_1 et x_2, dont les coefficients en les termes de degré $n \leqslant k$ sont des dérivées du même ordre n par rapport à x_1, x_2 ou x_1 et x_2, et sans terme libre. Ce qui entraîne

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial\varphi^3}\right| \leqslant rM, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}\right| \leqslant rM, \tag{33}$$

où M sont des constantes positives. En portant dans (31) les majorations (32) et (33), on obtient

$$\psi(r, \varphi) = O\left(\frac{h_r^2 + h_\varphi^2}{r}\right). \tag{34}$$

Donc, l'équation discrète (30) approche l'équation différentielle (23), si seulement est remplie la condition (24).

5. Approximation de l'équation de Poisson en coordonnées cylindriques. Si l'on intègre l'équation de Poisson sur un cylindre circulaire fini ou sur un tube, il semble naturel d'approcher cette équation sur un réseau en coordonnées cylindriques. En coordonnées cylindriques l'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta_{r\varphi z} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(r, \varphi, z), \tag{35}$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = x_2/x_1$, $z = x_3$ ou

$$\Delta_{r\varphi} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(r, \varphi, z).$$

L'équation de Poisson en coordonnées cylindriques (35) est la même qu'en coordonnées polaires au terme $\partial^2 u/\partial z^2$ près. On peut encore se servir des réseaux ω_r et ω_φ et introduire sur la variable z un réseau régulier de pas h_z: $\omega_z = \{z_k = kh_z \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, h_z > 0\}$. Le réseau Ω sur lequel nous aurons à approcher l'équation (35) s'écrit

$$\Omega = \omega_r \times \omega_\varphi \times \omega_z = \{r_n, \varphi_m, z_k) \mid \varphi_m \in \omega_\varphi, r_n \in \omega_r, r_k \in \omega_z\}.$$

Mettons l'opérateur de Laplace $\Delta_{r\varphi z}\, u$ sous forme de la somme

$$\Delta_{r\varphi z} u = L_r u + L_\varphi u + L_z u,$$

$$L_r u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad L_\varphi u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad L_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Sur le réseau Ω les opérateurs L_r et L_φ peuvent être approchés de la même façon qu'en coordonnées polaires (cf. (29) et (25)), quant à l'opérateur L_z il sera approché par l'opérateur discret simple

$$\Lambda_z v = v_{\bar{z}z} \sim L_z v = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

L'approximation discrète de l'équation (35) peut s'écrire

$$\bar{\Lambda} y = \bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y + \Lambda_z y = -f(r, \varphi, z), \ (r, \varphi, z) \in \Omega, \tag{36}$$

où $\bar{\Lambda}_r$ et Λ_φ sont définis par les formules (29) et (25).

L'erreur d'approximation du schéma (36) vaut

$$\psi = \bar{\Lambda} u + f = \psi_{r,\varphi} + \Lambda_z u,$$

où $\psi_{r,\varphi} = \bar{\Lambda}_r u + \Lambda_\varphi u + f$ est représenté sous la forme (31) et

$$\Lambda_z u = L_z u + O(h_z^2).$$

Les précédentes majorations des dérivées par rapport à r et φ sont valables ici également. C'est pourquoi

$$\psi = O\left(\frac{h_\varphi^2 + h_r^2}{r} + h_z^2\right). \tag{37}$$

6. Approximation de l'équation de Poisson en coordonnées sphériques. Si l'on intègre l'équation de Poisson sur une sphère, une couronne sphérique, un secteur sphérique ou sur un autre domaine qui s'applique sur un parallélépipède par passage aux coordonnées sphériques, il semble naturel d'approcher cette équation en lesdites coordonnées. L'équation de Poisson s'écrit alors

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -f(r, \varphi, \theta), \tag{38}$$

où

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arccos\frac{x_3}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{x_1},$$

quant à l'espace $Ox_1x_2x_3$, par passage aux coordonnées sphériques, il se transforme en le parallélépipède semi-infini

$$\{0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}.$$

Il est commode, pour la suite, d'introduire les notations

$$L_r u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad L_\varphi u = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

$$L_\theta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right), \quad \Delta_{r,\varphi,\theta} = L_r + L_\varphi + L_\theta$$

et d'écrire (38) sous la forme

$$L_r u + L_\varphi u + L_z u = -f(r, \varphi, \theta). \tag{38'}$$

Pour réseau sur la variable φ on peut encore se servir de ω_φ. Mais sur r on aura plus intérêt à utiliser un réseau régulier de pas h_r translaté d'un pas à droite:

$$\omega_r = \{r_n = (n + 1) h_r,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ h_r > 0\}.$$

Sur la variable θ il est plus commode de prendre un réseau régulier, translaté d'un demi-pas, à droite de l'extrémité gauche de l'intervalle $[0, \pi]$, et d'un demi-pas, à gauche de l'extrémité droite de ce même intervalle:

$$\omega_\theta = \{\theta_i = (i + 0{,}5) h_\theta,\ i = 0, 1, 2, \ldots, I - 1,\ h_\theta = \pi/I\}.$$

En définitive le parallélépipède est tramé du réseau

$$\Omega = \omega_r \times \omega_\varphi + \omega_\theta = \{(r_n, \varphi_m, \theta_i),\ r_n \in \omega_r,\ \varphi_m \in \omega_\varphi,\ \theta_i \in \omega_\theta\}.$$

L'opérateur L_φ admet l'approximation évidente (au nœud $(r_n, \varphi_m, \theta_i)$)

$$\Lambda_\varphi u = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} v_{\bar{\varphi}\varphi} \sim L_\varphi v = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}. \tag{39}$$

L'opérateur L_r en tant qu'opérateur à coefficients variables peut être approché par la méthode du bilan (cf. § 3, chap. II) à l'aide de l'expression (6) § 3, chap. II. Ce qui donne

$$\Lambda_r v = \frac{1}{r^2} (\rho v_{\bar{r}})_r \sim L_r v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right), \tag{40}$$

où $\rho = \rho(r) = rr^{(-1_r)} = r(r - h_r)$, $r \geqslant h_r$. Lorsque $r = h_r$ l'expression (40) s'écrit

$$\Lambda_r v = \frac{1}{r^2 h_r} \rho^{(+1_r)} v_r, \quad \rho^{(+1_r)} = r(r + h_r) = 2h_r^2, \tag{40'}$$

puisque $\rho(h_r) = 0$. On considérera formellement que c'est l'approximation de l'opérateur $L_r v$ pour $r = h_r$.

L'opérateur $L_\theta v$ est également un opérateur à coefficients variables et l'usage de la méthode du bilan avec $\theta \neq 0{,}5h_\theta$ et $\theta = \pi - 0{,}5h_\theta$ et la relation (9) du § 3, chap. II nous conduit à l'opérateur Λ_θ qui approche l'opérateur L_θ:

$$\Lambda_\theta v = \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \bar{\theta} y_{\bar{\theta}})_\theta \sim L_\theta v = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \tag{41}$$

où $\bar{\theta} = \bar{\theta}_i = \theta_i - 0{,}5h_\theta = ih_\theta$.

Comme $\theta = 0$ pour $\theta = 0{,}5h_\theta$ $(i = 0)$, $\bar{\theta}^{(+1)} = (\theta - 0{,}5h_\theta) + h_\theta = \pi$ pour $\theta = \pi - 0{,}5h_\theta$, écrivons les expressions de Λ_θ pour $\theta = 0{,}5h_\theta$ et $\theta = \pi - 0{,}5h_\theta$:

$$\Lambda_\theta v = \frac{\sin \bar{\theta}^{(+1)}}{h_\theta r^2 \sin \theta} y_\theta \quad \text{pour } \theta = 0{,}5h_\theta, \quad (\bar{\theta}^{(+1)} = h_\theta),$$

$$\Lambda_\theta v = -\frac{\sin \bar{\theta}}{h_\theta r^2 \sin \theta} y_{\bar{\theta}} \quad \text{pour } \theta = \pi - 0{,}5h_\theta, \quad (\bar{\theta} = \pi - h_\theta).$$

Prenons ces expressions pour approximation discrète de l'opérateur L_θ pour $\theta = 0{,}5h_\theta$ et $\theta = \pi - 0{,}5h_\theta$, i.e. on utilisera la formule (41) dans tous les nœuds du réseau ω_θ (et Ω).

Nous avons donc obtenu l'approximation discrète suivante sur le réseau Ω de l'équation (38);

$$\Lambda y = \Lambda_r y + \Lambda_\varphi y + \Lambda_\theta y = -f(r, \varphi, \theta), \ (r, \varphi, \theta) \in \Omega, \tag{42}$$

où les opérateurs Λ_r, Λ_φ et Λ_z se définissent par les formules (40), (40'), (39) et (41).

Passons au calcul de l'erreur d'approximation affectant le schéma discret (42):

$$\psi = \Lambda u + f = \Lambda_r u + \Lambda_\varphi u + \Lambda_\theta u + f(r, \varphi, \theta), \tag{43}$$

où u est solution de l'équation différentielle (38). Développons $\Lambda_r u$, $\Lambda_\varphi u$ et $\Lambda_\theta u$ respectivement suivant les puissances de h_r, h_φ et h_θ.

Comme

$$u_r = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} + \frac{h_r^3}{24}\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4},$$
$$u_{\bar r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_{r=r_n} - \frac{h_r^3}{24}\frac{\overline{\overline{\partial^4 u}}}{\partial r^4}, \tag{44}$$

où

$$\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\bigg|_{r=\bar r_n}, \quad \bar r_n \in [r_n, r_{n+1}],$$
$$\frac{\overline{\overline{\partial^4 u}}}{\partial r^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\bigg|_{r=\bar{\bar r}_n}, \quad \bar{\bar r}_n \in [r_{n-1}, r_n],$$

et $\rho = r(r - h_r)$, $\rho^{(+1_r)} = (r + h_r)r$, on obtient

$$\Lambda_r u = \frac{1}{r^2}(\rho u_{\bar r})_r = \frac{1}{h_r r^2}(\rho^{(+1_r)} u_r - \rho u_{\bar r}) =$$
$$= L_r u + \frac{h_r^2}{3r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{h_r^2}{24}\left\{\left(1 + \frac{h_r}{r}\right)\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial r^4} + \left(1 - \frac{h_r}{r}\right)\frac{\overline{\overline{\partial^4 u}}}{\partial r^4}\right\}. \tag{45}$$

Pour $\Lambda_\varphi u$ on a la représentation évidente

$$\Lambda_\varphi u = L_\varphi u + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{h_\varphi^2}{12}\frac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial r^4}, \tag{46}$$

où

$$\frac{\widetilde{\partial^4 u}}{\partial \varphi^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}\bigg|_{\varphi=\tilde\varphi_m}, \quad \tilde\varphi_m \in [\varphi_{m-1}, \varphi_{m+1}].$$

Considérons maintenant l'expression

$$\Lambda_\theta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta}(\sin\bar\theta u_{\bar\theta})_\theta = \frac{1}{h_\theta r^2 \sin\theta}[\sin\bar\theta^{(+1)} u_\theta - \sin\bar\theta u_{\bar\theta}].$$

En portant ici les expressions de u_θ et $u_{\bar\theta}$ déduites par les formules (44) et en faisant quelques transformations évidentes, on obtient

$$\Lambda_\theta u = L_\theta u + \left\{-\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\left(1 - \frac{2\sin(h_\theta/2)}{h_\theta}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta} - \right.$$
$$- \frac{2\sin^2(h_\theta/4)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{h_\theta^2}{3}\frac{\sin(h_\theta/2)}{h_\theta}\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} +$$
$$\left. + \frac{h_\theta^2}{24 r^2 \sin\theta}\left[\sin(\theta + 0{,}5h_\theta)\frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial\theta^4} + \sin(\theta - 0{,}5h_\theta)\frac{\overline{\overline{\partial^4 u}}}{\partial\theta^4}\right]\right\}. \tag{47}$$

En portant (45), (46) et (47) dans (43), on obtient le développement de l'erreur d'approximation ψ suivant les puissances de h_r, h_φ et h_θ. Pour estimer l'ordre de ψ par rapport à h_r, h_φ et h_θ il est nécessaire d'estimer les dérivées par rapport à r, φ et θ figurant dans l'expression de ψ.

Supposons que la solution de l'équation (1) (ou (38)) possède des dérivées quatrièmes bornées par rapport aux coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3. De $x_1 = r \sin\theta \cos\varphi$, $x_2 = r \sin\theta \sin\varphi$, $x_3 = r\cos\theta$, on déduit

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial x_3}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial r^k} = 0,$$
$$k > 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Les dérivées $\partial^k u/\partial r^k$, $k = 1, 2, 3, 4$ sont des combinaisons linéaires des dérivées de u d'ordre $j \leqslant k$ par rapport à x_1, x_2 et x_3, dont les coefficients dépendent de $\partial x_i/\partial r$, $i = 1, 2, 3$. Elles sont donc bornées :

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right| \leqslant M',$$

où M et M' sont des constantes positives. On a par ailleurs

$$\frac{\partial x_1}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi = -x_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial\varphi} = r\sin\theta\cos\varphi = x_1,$$
$$\frac{\partial x_3}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial\varphi^2} = -x_1, \quad \frac{\partial^3 x_1}{\partial\varphi^3} = x_2, \quad \frac{\partial^4 x_1}{\partial\varphi^4} = x_1,$$
$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial\varphi^2} = -x_2, \quad \frac{\partial^3 x_2}{\partial\varphi^3} = -x_1, \quad \frac{\partial^4 x_2}{\partial\varphi^4} = x_2.$$

En calculant les dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \sum_{i,\,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial\varphi}\frac{\partial x_j}{\partial\varphi} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial\varphi^2}, \text{ etc ;}$$

on constate que

$$\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4} = \sum_{j=1}^{4} P_j(x_1, x_2; u),$$

où $P_j(x_1, x_2; u)$ est un polynôme homogène en x_1, x_2 de degré $j \geqslant 1$ et de coefficients proportionnels aux j-ièmes dérivées de la fonction u par rapport à x_1 et x_2. Donc la dérivée $\partial^4 u/d\varphi^4$ est proportionnelle à $r \sin\theta$. Les dérivées $\partial^k u/\partial x_i^s\,\partial x_{i'}^{k-s}$, $s \leqslant k$, i, $i' = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4$ étant bornées, on aura

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial\varphi^4}\right| \leqslant Mr\sin\theta, \quad M = \text{const} > 0.$$

Passons maintenant à l'estimation des dérivées $\partial^k u/\partial\theta^k$, $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = \sum_{i,\, j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial\theta} \frac{\partial x_j}{\partial\theta} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial\theta^2}, \text{ etc.}$$

Comme

$$\frac{\partial x_1}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x_2}{\partial\theta} = r\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial\theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial\theta^2} = -r\sin\theta\cos\varphi = -x_1,$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial\theta^2} = -x_2, \quad \frac{\partial^2 x_3}{\partial\theta^2} = -x_3, \quad \frac{\partial^3 x_1}{\partial\theta^3} = \frac{\partial x_1}{\partial\theta},$$

etc., on a

$$\frac{\partial^k u}{\partial\theta^k} = \sum_{j=1}^{k} P_j(r;\ \varphi,\ \theta;\ u), \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

où $P_j(r;\ \varphi,\ \theta;\ u)$ est un polynôme homogène en r de degré j à coefficients bornés dépendant de φ, θ et des j-ièmes dérivées de la fonction u par rapport aux variables x_1, x_2, x_3. Donc, quel que soit $k \geqslant 1$, les dérivées $\partial^k u/\partial r^k$ sont proportionnelles à r et

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial\theta^k}\right| \leqslant Mr, \quad M = \text{const} > 0, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Finalement on obtient l'estimation suivante de l'erreur d'approximation (43):

$$\psi = O\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\theta^2 + h_\varphi^2}{r\sin\theta}\right) \quad \text{ou} \quad |\psi| \leqslant M\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\theta^2 + h_\varphi^2}{r\sin\theta}\right),$$

où $M = \text{const} > 0$.

§ 2. Position des problèmes aux limites discrets pour l'équation de Poisson dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet

Au § 1 nous avons examiné les plus simples approximations discrètes de l'équation de Poisson en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques.

Passons maintenant à la formulation des problèmes respectifs discrets de Dirichlet. A ces fins il faut se donner les conditions aux

limites aux nœuds frontière du réseau, et dans le cas de frontière curviligne composer les équations discrètes aux nœuds du réseau proches de la frontière. Dans ce paragraphe on se propose d'étudier la position des problèmes aux limites discrets.

1. Problème discret de Dirichlet pour le rectangle. Soit donné sur le plan Ox_1x_2 un domaine borné G de frontière Γ. Dans $\bar{G} = G \cup \Gamma$ on considère le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson : on demande de trouver dans $\bar{G}$ une solution continue $u(x)$ de l'équation

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{1}$$

qui vérifie les conditions aux limites

$$u = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma, \tag{2}$$

où (x) et $g(x)$ sont des fonctions données.

Avant d'approcher le problème (1), (2) par un problème discret, il faut introduire un réseau dans le domaine G. Pour construire un réseau dans $\bar{G}$ il faudra tenir compte du caractère spécifique de sa frontière. On s'arrangera pour introduire un réseau sur lequel on éprouvera le moins de difficultés à approcher le problème (1), (2). Si, par exemple, le domaine G est rectangulaire et de côtés parallèles aux axes de coordonnées

$$G = \{x = (x_1, x_2) \mid a_\alpha < x_\alpha < b_\alpha, \ \alpha = 1, 2\},$$

il faut accorder la longueur des pas h_1 et h_2 du réseau rectangulaire régulier avec celle des côtés du rectangle $(b_1 - a_1)$ et $(b_2 - a_2)$. Plus exactement, on a intérêt à supposer que

$$h_1 = (b_1 - a_1)/N_1, \quad h_2 = (b_2 - a_2)/N_2, \tag{3}$$

où $N_1 > 0$ et $N_2 > 0$ sont des entiers. Alors pour réseau dans $\bar{G}$ on peut prendre l'ensemble de points suivant

$$\bar{\omega} = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = a_\alpha + i_\alpha h_\alpha, \ 0 \leqslant i_\alpha \leqslant N_\alpha, \ \alpha = 1, 2\}. \tag{4}$$

L'ensemble

$$\omega = \{x_i \mid 0 < i_1 < N_1, \ 0 < i_2 < N_2\}$$

est l'ensemble des nœuds intérieurs du réseau $\bar{\omega}$, l'ensemble

$$\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid i_1 = 0, N_1, \\ 0 < i_2 < N_2 \text{ et } 0 < i_1 < N_1, \ i_2 = 0, N_2\}$$

celui des nœuds frontière.

Le réseau $\bar{\omega}$ a ceci de particulier qu'il est régulier dans chacune des directions x_1 et x_2 et sa frontière γ est située sur celle du rectangle G. Si nous avions refusé de choisir spécialement les pas (3), nous

aurions eu à nous accommoder soit de l'irrégularité du réseau dans G soit de la non-appartenance de la frontière γ ou de l'une de ses parties à la frontière Γ du rectangle G. La première circonstance n'est pas très commode dans l'approximation de l'équation (1), la seconde, dans l'approximation de la condition aux limites (2).

Nous avons donc construit dans $\bar{G}$ un réseau sur lequel on peut approcher l'équation (1), (2) de la manière suivante:

$$\Lambda y = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \omega \tag{5}$$

$$y = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \gamma, \tag{6}$$

où Λ est un opérateur discret construit sur un stencil de cinq points:

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{h_1^2}(y^{(+1_1)} - 2y + y^{(-1_1)} + \frac{1}{h_2^2}(y^{(+1_2)} - 2y + y^{(-1_2)}). \tag{7}$$

Une autre approximation du problème (1), (2) est possible sur le réseau $\bar{\omega}$, en l'occurrence

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \tag{8}$$

$$y = g(x), \quad x \in \gamma, \tag{9}$$

où Λ' est un opérateur construit sur un stencil de neuf points défini par la formule (6) du § 1, i.e.

$$\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y \tag{10}$$

ou

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},$$

où $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, et $\varphi(x)$ est défini par la formule (7) ou (7′) du § 1.

Si les côtés $(b_1 - a_1)$ et $(b_2 - a_2)$ sont commensurables, alors on peut tramer G d'un réseau carré de pas h, de sorte que sa frontière γ appartiendra de nouveau à Γ. Sur un tel réseau on peut approcher le problème (1), (2) par le problème

$$\left.\begin{aligned} \Lambda' y &= \Lambda y + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi(x), & x \in \omega \\ y &= g(x) & x \in \gamma \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

où Λ' est défini par la formule (10) pour $h_1 = h_2 = h$ et $\varphi(x)$ par l'expression (8) du § 1.

2. Domaine à frontière curviligne. On n'a pas intérêt toutefois à choisir un réseau rectangulaire si le domaine G est un cercle. Dans ce cas il est plus naturel de passer aux coordonnées polaires et tramer G d'un réseau polaire. Supposons que G est un cercle de rayon R

centré en l'origine des coordonnées

$$G = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\}.$$

En coordonnées polaires l'équation (1) s'écrit

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = L_r u + L_\varphi u = -f(r, \varphi). \quad (12)$$

Dans le paragraphe précédent on a discuté du meilleur choix du réseau pour approcher l'équation (12). On a vu qu'il était préférable d'exclure le point $r = 0$ du nombre de nœuds et de disposer à une distance $0{,}5h_r$, où h_r est le pas du réseau sur r les plus proches nœuds de ce point. Pour faciliter l'approximation des conditions aux limites pour $r = R$, il faut choisir le réseau dans $\bar{G}$ de la forme suivante :

$$\bar{\omega} = \{(r_n, \varphi_m) \mid r_n = (n + 0{,}5)\, h_r\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N \quad 1, N,$$
$$h_r = R/(N + 0{,}5), \quad \varphi_m = mh_\varphi,$$
$$m = 0, 1, \ldots, M - 1, \; h_\varphi = 2\pi/M\}.$$

L'ensemble des points intérieurs du réseau ω est

$$\omega = \{(r_n, \varphi_m) \in G, \; n = 0, 1, \ldots, N - 1, \; m = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\ldots, M - 1\},$$

quant aux nœuds frontière, ils appartiennent à l'ensemble $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ et ont pour coordonnées (R, φ_m), $m = 0, 1, 2, \ldots, M - 1$. Sur ce réseau le problème (1), (2) est approché par le problème suivant :

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Lambda} y = \bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y = -f(r, \varphi), &\quad (r, \varphi) \in \omega, \\ y(r, \varphi) \quad y(r, \varphi + 2\pi), &\quad (r, \varphi) \in \omega; \\ y = g(\varphi), &\quad (r, \varphi) \in \gamma, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

où l'opérateur $\bar{\Lambda}$ est défini par les formules (29), (30) du § 1.

Considérons encore deux exemples de domaines dans lesquels le réseau doit être spécialement choisi.

Soit G un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit de longueur $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ sont portés par les axes de coordonnées :

$$G = \left\{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < a_1, \; 0 < x_2 < -\frac{a_2}{a_1} x_1 + a_2\right\}$$

désignons par Γ la frontière du triangle.

Divisons chaque côté de l'angle droit en un même nombre N de parties égales en posant

$$h_1 = \frac{a_1}{N}, \quad h_2 = \frac{a_2}{N},$$

où N est un entier. Dans le domaine G formons le réseau ω avec les points de concours des droites $x_1 = i_1 h_1$, $x_2 = i_2 h_2$, où $i_1, i_2 = 0,$

1, 2, ... Avec un tel choix de h_1 et h_2 les droites $x_1 = i_1h_1$ et $x_2 = i_2h_2$ coupent l'hypothénuse aux mêmes points qui sont les nœuds frontière du réseau. Le réseau obtenu est dit *accordé*. Il est régulier dans chaque direction. Désignons par ω l'ensemble de tous les nœuds du réseau dans le domaine $\bar{G} = G \cup \Gamma$

$$\bar{\omega} = \{x_i = (i_1h_1,\ i_2h_2) \in \bar{G} \mid 0 \leqslant i_1 \leqslant N,$$
$$i_2 \leqslant N - i_1,\ i_1,\ i_2 = 0,\ 1,\ \ldots,\ N\};$$

soit $\omega = \{x_i = (i_1h_1,\ i_2h_2) \in G \mid 0 < i_1 < N,\ i_2 < N - i_1\}$ l'ensemble des nœuds intérieurs et

$$\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega = \{x_i = (i_1h_1,\ i_2h_2) \in \Gamma,\ i_1 = 0,\ N,\ i_2 = N - i_1\}$$

celui des nœuds frontière.

En tous les nœuds intérieurs de ce réseau on peut écrire le schéma de cinq points $\Lambda y = y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2} = -f(x)$, où Λ est défini par la formule (7), et donner sur la frontière la fonction $g(x)$ en supposant que $y = g(x)$ pour $x \in \gamma$. Finalement nous arrivons à un problème du type (5), (6).

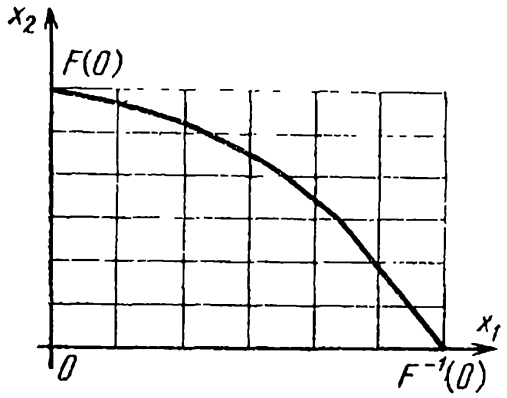


Fig. 8

Supposons que le domaine G est un triangle curviligne

$$G = \{x = (x_1,\ x_2) \mid x_\alpha > 0,$$
$$\alpha = 1,\ 2,\ x_2 < F(x_1)\},$$

où $F(x_1)$ est une fonction continue, monotone décroissante et

$$-\infty < F'(x_1) < 0.$$

Il est clair que les côtés curvilignes de ce triangle sont de longueur $a_1 = F^{-1}(0)$, où $F^{-1}(x_2)$ est la fonction inverse de $F(x_1)$, et $a_2 = F(0)$ respectivement. Si l'on tente d'introduire dans G un réseau régulier sur chaque axe, en supposant par exemple que $h_1 = F^{-1}(0)/N_1 = a_1/N_1$, $h_2 = F(0)/N_2 = a_2/N_2$, il peut arriver que les droites $x_1 = i_1h_1$ coupent la courbe $x_2 = F(x_1)$ en certains points, et les droites $x_2 = i_2h_2$ en d'autres, i.e. on peut se trouver dans la situation de la figure 8.

Si l'on suppose que le réseau est régulier dans G, sa frontière γ ne sera pas entièrement contenue dans la frontière Γ du domaine initial, ce qui aura pour effet de compliquer l'approximation des conditions aux limites. Si pour frontière γ on prend les points d'intersection des droites avec la frontière Γ, le réseau ω sera irrégulier au voisinage du tronçon curviligne de Γ.

Si les domaines sont de la forme indiquée on aura parfois intérêt à considérer un réseau irrégulier accordé. En se donnant par

exemple un réseau régulier de pas $h_1 = F^{-1}(0)/N$ le long de l'axe x_1, choisissons un réseau le long de l'axe x_2 en supposant que

$$x_2^{(i_2)} = F(x_1^{(N-i_1)},\ x_1^{(N-i_1)}) = (N - i_1)\,h_1,\ i_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Le réseau construit est représenté sur la figure 9. Tous les nœuds frontière du réseau sont situés sur la frontière du triangle curviligne. Le réseau est accordé. Ses pas sur x_2 sont donnés par

$$h_2^{(i_2)} = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = F(x_1^{(N-i_2)}) - F(x_1^{(N-i_2+1)}) =$$
$$= F'(x_1^{(N-i_2)} + \theta h_1)\,h_1 = O(h_1),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1,\ \text{i.e. } h_2 - O(h_1).$$

Sur le réseau obtenu le problème (1), (2) peut être approché par le schéma (5), (6), où Λ est un opérateur ordinaire construit sur un stencil de cinq points, défini par la formule (22), § 1.

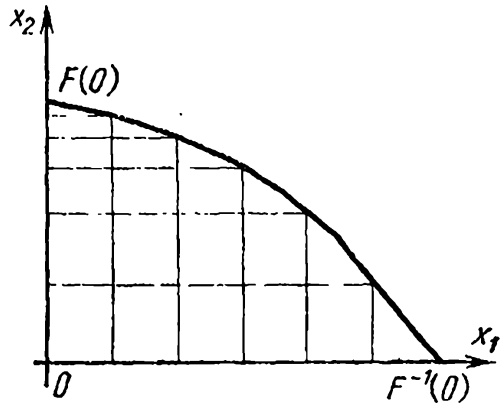


Fig. 9

3. Domaine de forme quelconque. Supposons maintenant que la frontière Γ du domaine G est une courbe différentiable par morceaux de forme assez générale. Dans ce cas il est difficile de faire une quelconque recommandation générale quant au choix d'un réseau spécial. Pour obtenir le réseau $\bar{\omega}\ (\bar{G})$ dans le domaine $\bar{G} = G \cup \Gamma$ donnons-nous sur le plan Ox_1x_2 un réseau régulier rectangulaire Ω constitué des points d'intersection des deux familles de droites parallèles $x_1 = i_1h_1$; $x_2 = i_2h_2$, i_1, $i_2 = 0$, ± 1, ± 2, . . ., ; les points $x_i = (x_1^{(i_1)},\ x_2^{(i_2)}) = (i_1h_1,\ i_2h_2)$ sont les nœuds du réseau Ω. S'agissant de l'approximation de l'équation (1) sur un stencil de cinq points, on dira que les nœuds $x = (x_1,\ x_2)$ et $x' = (x_1',\ x_2')$ sont voisins *) si

$$\left|\frac{x_1 - x_1'}{h_1}\right| + \left|\frac{x_2 - x_2'}{h_2}\right| > 1 \text{ ou } |i_1 - i_1'| + |i_2 - i_2'| = 1,$$

où $x_\alpha = i_\alpha h_\alpha$, $x_\alpha' = i_\alpha' h_\alpha$, $\alpha = 1,\ 2$, de sorte que $|i_\alpha - i_\alpha'| = 1$ ou 0. Soit $\omega = \{x = (i_1h_1,\ i_2h_2) \in G\}$ l'ensemble de tous les nœuds $x = (i_1h_1,\ i_2h_2)$ contenus à l'intérieur du domaine G; nous les appellerons nœuds intérieurs du réseau $\bar{\omega}\ (\bar{G})$. On dira qu'un nœud inté-

*) La notion de nœud voisin dépend essentiellement de la forme de l'équation à approcher, ou plus exactement de la forme du stencil sur lequel elle sera approchée. La définition des nœuds voisins que nous avons donnée est relative à l'approximation de l'équation (1) sur un stencil de cinq points en « croix » composé des nœuds (x_1, x_2), $(x_1 - h_1, x_2)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, $(x_1x_2 - h_2)$, $(x_1, x_2 + h_2)$.

rieur $x_i \in \omega$ est régulier si les quatre nœuds voisins qui forment avec lui un stencil en « croix » de cinq points appartiennent à $\overline{G}$. Désignons par $\overset{\circ}{\omega}$ l'ensemble des points intérieurs réguliers. Si l'un au moins des quatre nœuds voisins de x_1 n'appartient pas à $\overline{G}$ (i.e. appartient à G ou à Γ), on dira que c'est un nœud intérieur irrégulier du réseau $\overline{\omega}$. Désignons par $\overset{*}{\omega}$ l'ensemble des nœuds intérieurs irréguliers, de sorte que $\overset{\circ}{\omega} \cup \overset{*}{\omega} = \omega$. Appelons les points d'intersection

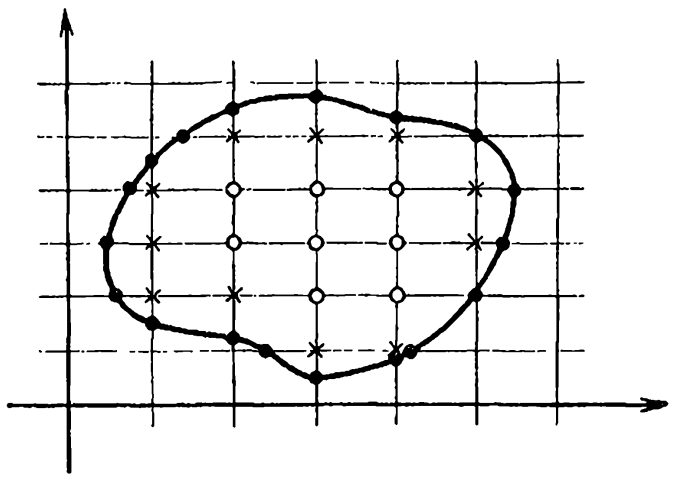


Fig. 10

des droites $x_1 = i_1 h_1$, $x_2 = i_2 h_2$, i_1, $i_2 = 0, \pm 1, \pm 2$ avec la frontière Γ du domaine G nœuds frontière et désignons l'ensemble de ces nœuds par γ. Donc dans $\overline{G}$ on a construit le réseau $\overline{\omega} = \omega \cup \gamma$ constitué des nœuds intérieurs ω et des nœuds frontière γ (fig. 10).

Soit à résoudre le problème discret qui approche le problème (1), (2) sur le réseau $\overline{\omega}$. A ces fins il est nécessaire d'approcher l'équation (1) et la condition aux limites (2) sur le réseau $\overline{\omega}$. On approchera l'équation (1) par l'équation (5) sur un stencil de cinq points en « croix» de l'ensemble des nœuds intérieurs réguliers $\overset{\circ}{\omega}$. Aux nœuds frontière γ on se donne la valeur de la fonction cherchée

$$y = g(x) \text{ pour } x \in \gamma.$$

Reste à écrire l'approximation aux nœuds irréguliers $\overset{*}{\omega}$.

On distinguera trois cas:

1. *Une simple translation ou une interpolation d'ordre zéro.* Dans le problème aux limites discret les nœuds $\overset{*}{\omega}$ sont considérés comme des nœuds frontière et la condition sur $\overset{*}{\omega}$ est donnée par l'expression

$$y(x) = g(\bar{x}), \quad x \in \overset{*}{\omega}, \tag{14}$$

où $\bar{x} \in \gamma$ est le nœud le plus proche de x. L'expression (14) peut être interprétée comme une interpolation d'ordre zéro. Il est aisé de voir que l'erreur qui affecte la solution cherchée aux nœuds $\overset{*}{\omega}$ est $O(|h|)$.

2. *Une interpolation du premier ordre.* L'ensemble des nœuds $\overset{*}{\omega}$ est de nouveau considéré comme un ensemble frontière, mais la condition aux limites pour le problème discret est donnée par une interpolation du premier ordre sur l'un des axes (x_1 ou x_2). Par exemple, dans le cas représenté sur la figure 11, la valeur de la fonction cherchée au nœud O est déterminée par une interpolation linéaire sur l'axe x_1 sur les nœuds *3* et *1*, i.e.

$$y_0 = \frac{h_1^- y_1 + h_1 y_3}{h_1^- + h_1} \tag{15}$$

(on vérifie que l'erreur d'approximation de l'expression (15) est $O(|h|^2)$.

Remarque. Parfois on aura intérêt à considérer que les nœuds $\overset{*}{\omega}$ sont intérieurs. Dans ce cas on considérera que l'expression (15), mise préalablement sous la forme

$$\Lambda_1 y_0 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) = 0, \tag{16}$$

est une approximation de l'équation (1). Il est évident que l'erreur d'approximation de l'équation (1) par l'expression (16) est $O(1)$. Dans cette interprétation des nœuds $\overset{*}{\omega}$ il semble plus naturel de remplacer (16) par l'expression

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) + \frac{y_2 - 2y_0 + y_4}{h_2^2} = -f_0, \tag{17}$$

dont l'erreur d'approximation est également $O(1)$ (cf. (20)). Actuellement on n'utilise pratiquement pas la translation simple et l'interpolation du premier ordre.

3. *Une approximation de l'équation sur un réseau irrégulier.* Les nœuds $\overset{*}{\omega}$ sont considérés comme des nœuds intérieurs, et l'équation (1) est approchée sur un stencil de cinq points en « croix » d'un réseau irrégulier. L'un des éventuels stencils irréguliers est représenté sur la figure 11. Le nœud *3* est frontière, les nœuds 1, 2, *4* intérieurs. Donc,

$$\Lambda^* y_0 = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^-}\right) + \frac{1}{h_2^2}(y_2 - 2y_0 + y_4) = -f_0, \tag{18}$$

$$\hbar_1 = 0{,}5\,(h_1 + h_1^-).$$

Dans le cas général, il peut s'avérer que les nœuds $x^{(-1_1)}$ (ou $a^{(+1_1)}$), $x^{(+1_1)}$ (ou $x^{(-1_1)}$) soient frontière. L'équation de Poisson est alors

approchée sur un stencil de cinq points irrégulier en « croix » en vertu de

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y \text{ pour } x \in \overset{*}{\omega},$$

où

$$\Lambda_\alpha^* y = y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & \text{si } x^{(-1_\alpha)} \in \gamma, \\ \dfrac{1}{\hbar_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), & \text{si } x^{(+1_\alpha)} \in \gamma, \end{cases} \tag{19}$$

$\hbar_\alpha = 0{,}5\,(h_\alpha + h_\alpha^*)$, h_α^* est la distance de x au nœud frontière $x^{(-1\alpha)} \in \gamma$ ou $x^{(+1\alpha)} \in \gamma$. En un nœud irrégulier l'erreur d'approximation $\psi^* = \Lambda^* u - Lu$ est visiblement du premier ordre relativement à $|h|$, puisque

$$\Lambda_\alpha^* u - L_\alpha u = O(\hbar_\alpha) = O(\hbar_\alpha).$$

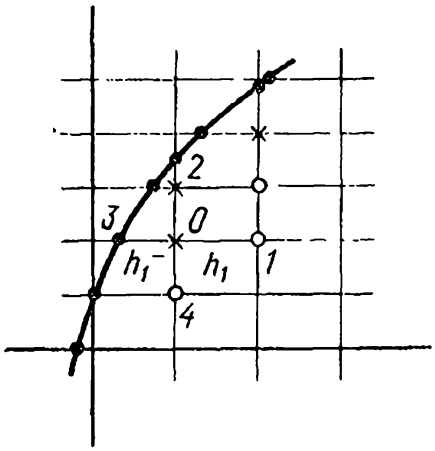


Fig. 11.

4. *Deuxième procédé d'approximation de l'équation en un nœud irrégulier sur un réseau irrégulier* (schéma conservatif). Si l'on étudie un opérateur discret confondu avec $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$ aux nœuds réguliers $x \in \overset{\circ}{\omega}$ et avec $\Lambda^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2}$ aux nœuds irréguliers $x \in \overset{*}{\omega}$, comme un opérateur dans l'espace des fonctions discrètes définies sur $\bar{\omega}$ et nulles sur γ, on constate que cet opérateur perd parfois certaines des propriétés importantes propres à l'opérateur différentiel $Lu = \Delta u$: autoconjugaison, signe défini. Ceci est dû au procédé d'approximation de l'opérateur de Laplace aux nœuds irréguliers. En modifiant cette approximation, on obtient un opérateur discret autoconjugué et de signe défini pour le problème de Dirichlet sur le réseau $\bar{\omega}$. Il suffit de poser

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y, \quad \Lambda^* y = -f(x) \text{ pour } x \in \overset{*}{\omega},$$

où

$$\Lambda_\alpha^* y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & x^{(-1_\alpha)} \in \gamma, \\ \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), & x^{(+1_\alpha)} \in \gamma. \end{cases} \tag{20}$$

La distinction formelle entre les opérateurs (19) et (20) tient au facteur $1/\hbar_\alpha$ dans (19) et au facteur $1/h_\alpha$ dans (20). L'espace H de fonctions discrètes, définies sur $\bar{\omega}$ et nulles sur γ est muni du produit scalaire

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y(x), v(x) h_1 h_2.$$

La propriété d'autoconjugaison de l'opérateur discret, mentionnée plus haut, traduit le fait que la matrice du système d'équations algébriques linéaires (équations discrètes) en le vecteur inconnu Y (fonction discrète $y(x)$, $x \in \omega$) est symétrique. Ceci nous permet d'utiliser, pour trouver $y = y(x)$, des méthodes d'itération rapidement convergentes, élaborées pour les équations $Ay = f$ à matrice symétrique A. C'est pourquoi on préférera la dernière méthode (20) d'approximation de l'équation $\Delta u = -f$ aux nœuds non intérieurs irréguliers $x \in \overset{*}{\omega}$.

Ainsi le problème discret de Dirichlet pour l'équation de Poisson se pose de la façon suivante:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda y &= y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x) \text{ aux nœuds réguliers } x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \Lambda^* y &= -f(x) \text{ aux nœuds irréguliers } x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ y &= g(x) \text{ aux nœuds frontière } x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

où Λ^* est défini par l'expression (20).

Si Λ^* est défini par la formule (19), on représentera le problème correspondant comme le problème (21').

Si y est solution du problème (21), u, solution du problème (1), (2), l'erreur $z(x) = y(x) - u(x)$ vérifient les conditions

$$\left.\begin{aligned} \Lambda z = -\psi(x) &\text{ pour } x \in \overset{\circ}{\omega}, \ \Lambda^* z = \psi^*(x) \text{ pour } x \in \overset{*}{\omega}, \\ z(x) = 0 &\text{ pour } x \in \nu, \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

où $\psi(x) = \Lambda u + f$, $\psi^* = \Lambda^* u + f$.

Si la fonction $u = u(x)$ possède dans $\bar{G}$ des dérivées bornées jusqu'au quatrième ordre, i.e. $u\ C\ G^4(G)$, l'erreur d'approximation du schéma conservatif autoconjugué (21) est $\psi(x) = O(|h|^2)$, $\psi^*(x) = O(1)$. Malgré l'abaissement du degré d'approximation (en comparaison avec le schéma (19)), on montrera au § 4 qu'aux nœuds intérieurs irréguliers, le schéma conservatif (21) possède une deuxième ordre de précision dans une métrique uniforme. L'étude de la convergence et du degré de précision du schéma discret (21) se ramène à l'estimation de la solution z du problème (22) au moyen des seconds membres ψ et ψ^*. La solution du problème (22) sera estimée au § 4. Ces estimations sont basées sur le principe du maximum pour les équations discrètes.

§ 3. Principe du maximum

Dans ce paragraphe on se propose d'étudier une classe d'équations discrètes pour lesquelles a lieu le principe du maximum. Dans cette classe entrent la plupart des principales approximations discrètes des problèmes aux limites pour équations elliptiques du second ordre sans dérivées mixtes. Le principe du maximum permet d'établir la solubilité d'un problème discret et dans nombre de cas d'estimer à priori sa solution.

1. Equations discrètes générales. Soit Ω un ensemble fini de points (nœuds) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un espace euclidien (réseau) de dimension p. Supposons qu'en chaque point $x \in \Omega$ est défini le stencil $\mathfrak{M}(x) \subset \Omega$, i.e. un sous-ensemble de points $x \in \Omega$. Désignons par $\mathfrak{M}' \equiv \mathfrak{M}(x) \setminus \{x\}$ le voisinage du point x. i.e. l'ensemble de tous les nœuds du stencil $\mathfrak{M}(x)$ à l'exclusion du nœud x. Considérons l'équation

$$Sy(x) = F(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

où $y(x)$ est la fonction cherchée, $F(x)$ une fonction discrète donnée (le second membre de l'équation), et S, un opérateur linéaire défini par la formule

$$Sv(x) \equiv A(x)\,v(x) - \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'(x)} B(x, \xi)\,v(\xi), \tag{2}$$

dont les coefficients $A(x)$ et $B(x, \xi)$ sont des fonctions discrètes de $x \in \Omega$ et $\xi \in \Omega$ données.

On supposera que les coefficients A et B vérifient les conditions

$$\begin{gathered} A(x) > 0, \ B(x, \xi) > 0, \ \forall x \in \Omega \text{ et } \forall \xi \in \mathfrak{M}'(x), \\ D(x) \equiv A(x) - \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'(x)} B(x, \xi) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Soit x un nœud du réseau Ω. Deux cas sont possibles : a) le voisinage $\mathfrak{M}'(x)$ de ce nœud est un ensemble vide, b) le voisinage $\mathfrak{M}'(x)$ contient au moins un nœud $\xi \in \Omega$.

Si le voisinage $\mathfrak{M}'(\bar{x})$ du nœud $\bar{x}$ est un ensemble vide, l'équation (1) s'écrit pour $x = \bar{x}$:

$$A(\bar{x})\,y(\bar{x}) = F(\bar{x}) \text{ ou } y(\bar{x}) = g(\bar{x}) \quad (g = F/A).$$

On appellera tout point tel que $\bar{x}$ nœud frontière, les points dont le voisinage contiendra au moins un point seront appelés nœuds intérieurs *). Désignons par γ l'ensemble de tous les nœuds frontière et par ω l'ensemble de tous les nœuds intérieurs du réseau Ω, de sorte que $\omega \cup \gamma = \Omega$.

*) Ces notions de nœuds intérieur et frontière dépendent visiblement de la forme de l'opérateur S, i.e. du stencil $\mathfrak{M}(x)$, $x \in \Omega$.

En présence de points frontière le problème (1) s'énonce comme suit : trouver la solution de l'équation

$$Sy(x) = F(x) \quad \text{avec } x \in \omega, \tag{4}$$

qui vérifie la condition aux limites

$$y(x) = g(x) \quad \text{avec } x \in \gamma, \tag{5}$$

où $F(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions données. C'est le premier problème aux limites sur le réseau Ω.

Voyons à titre d'exemple le problème (5), (6) du § 2 dans un rectangle. Il est aisé de transcrire l'équation discrète $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x)$ sous la forme

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y(x) - \frac{1}{h_1^2}\left(y^{(-11)} + y^{(+11)}\right) - \frac{1}{h_2^2}\left(y^{(-12)} + y^{(+12)}\right) =$$
$$= f(x), \quad x \in \omega, \quad y(x) = g(x), \quad x \in \gamma.$$

Une comparaison avec (4) montre qu'ici $A(x) = 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) > 0$, $B(x, \xi) = 1/h_1^2$ ou $1/h_2^2$, $F(x) = f(x)$, $D(x) \equiv 0$.

Dans le deuxième et le troisième problème aux limites pour équations elliptiques discrètes (dans le cas simple pour l'équation discrète de Poisson), la frontière n'existe pas au sens défini plus haut. Les nœuds situés sur la frontière Γ du domaine G se distinguent par le fait que le stencil y est plus petit qu'aux nœuds intérieurs du réseau. S'agissant par exemple du troisième problème aux limites pour l'équation de Poisson, on a $D(x) > 0$ aux nœuds $x \in \Gamma$ et $D(x) = 0$ aux autres nœuds.

Introduisons la notion de réseau connexe. Soient $\bar{x}$ et $\bar{\bar{x}}$ deux nœuds quelconques du réseau, non simultanément situés sur la frontière ; pour fixer les idées on supposera que $\bar{x}$ n'appartient pas à la frontière γ, i.e. $\bar{x} \in \omega$. Le réseau Ω est *connexe* si quels que soient $\bar{x} \in \omega$, $\bar{\bar{x}} \in \Omega$ on peut exhiber une suite de nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_m$ telle que tout nœud appartiendra au voisinage du nœud précédent, plus exactement

$$x_1 \in \mathfrak{M}'(\bar{x}), \quad x_2 \in \mathfrak{M}'(x_1), \ \ldots, \ x_m \in \mathfrak{M}'(x_{m-1}), \tag{6}$$
$$\bar{\bar{x}} \in \mathfrak{M}'(x_m).$$

Dans la suite on ne considérera que des réseaux Ω et des sous-réseaux Ω' connexes.

R e m a r q u e 1. Il est évident que s'agissant des réseaux connexes Ω, l'ensemble des nœuds intérieurs ω forme également un réseau connexe, et de plus on a la relation

$$\Omega = \bigcup_{x \in \omega} \mathfrak{M}(x).$$

Posons

$$\overline{\Omega}' = \bigcup_{x \in \Omega'} \mathfrak{M}(x)$$

où Ω' est un sous-domaine connexe quelconque de Ω.

2. Principe du maximum.

Théorème 1 (principe du maximum). *Soit Ω un réseau, S un opérateur défini sur Ω par* (2). *Supposons que Ω est un domaine connexe et que $\Omega' \subseteq \Omega$ est un sous-réseau connexe de Ω sur lequel les coefficients de l'opérateur S vérifient les conditions* (3). *Si une fonction discrète $y(x)$ définie sur Ω n'est pas constante sur*

$$\overline{\Omega}' = \bigcup_{x \in \Omega'} \mathfrak{M}(x) \subseteq \Omega \text{ et } Sy(x) \leqslant 0 \quad (Sy(x) \geqslant 0)$$

lorsque $x \in \Omega'$, alors $y(x)$ ne peut prendre sa valeur maximale positive (resp. minimale négative) sur Ω'.

Démonstration. 1. Soit

$$Sy(x) \leqslant 0. \tag{7}$$

Supposons qu'il existe un nœud $\bar{x} \in \Omega'$ en lequel $y(x)$ prend sa plus grande valeur positive :

$$y(\bar{x}) = \max_{x \in \Omega'} y(x) > 0. \tag{8}$$

On aura alors en ce nœud

$$Sy(\bar{x}) \equiv A(\bar{x})\, y(\bar{x}) - \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)\, y(\xi) =$$

$$= D(\bar{x})\, y(\bar{x}) + \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)\, (y(\bar{x}) - y(\xi)). \tag{9}$$

Le premier terme du second membre de (9) est négatif en vertu des conditions (3) : $D(\bar{x}) \geqslant 0$ et de l'hypothèse (8) : $y(\bar{x}) > 0$. En vertu de la même hypothèse $y(\bar{x}) \geqslant y(\xi)$, et de l'une des conditions (3) $B(x, \xi) > 0$. Donc les autres termes du second membre de (9) ne peuvent pas être négatifs. Et

$$Sy(\bar{x}) \geqslant 0.$$

Deux cas se présentent donc : ou

$$Sy(\bar{x}) > 0, \tag{10}$$

ou

$$Sy(\bar{x}) = 0. \tag{11}$$

L'assertion (10) ne peut pas être vraie puisqu'elle contredit la condition (7) du théorème. Il s'ensuit que soit l'hypothèse (8) est fausse et le théorème est démontré, soit de (10) et (11) c'est (11) qui est vraie.

Voyons la dernière éventualité. Les relations (8), (9) et la condition (3) entraînent que lorsque $D(x) > 0$, l'assertion (11) ne peut pas être vraie et donc soit l'hypothèse (8) est fausse et le théorème est démontré, soit $D(\bar{x}) = 0$. Supposons que $D(\bar{x}) = 0$. Les relations (8), (9) entraînent

$$y(\xi) = y(\bar{x}), \quad \xi \in \mathfrak{M}'(\bar{x}). \tag{12}$$

Comme par hypothèse $y(x) \not\equiv \text{const}$ pour $x \in \Omega'$, il existe un nœud $\bar{\bar{x}} \in \bar{\Omega}'$ tel que $y(\bar{\bar{x}}) < y(\bar{x})$. En vertu de la connexité de $\bar{\Omega}'$ on peut exhiber une suite de nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(x_i \in \Omega')$ qui vérifie les conditions (6). En vertu de (12) $y(x_1) = y(\bar{x})$. Sans perdre en généralité on peut admettre que

$$y(x_1) = y(x_2) = \ldots = y(x_m) = y(\bar{x}),$$

puisque si l'on avait pu prolonger cette chaîne d'égalités jusqu'à un m_0, $1 < m_0 < m$, pour $\bar{\bar{x}}$ on aurait pu prendre x_{m_0+1}.

Calculons

$$Sy(x_m) = D(x_m)\, y(x_m) + \sum_{\xi \in \mathfrak{M}(x_m)} B(x_m, \xi)\,(y(x_m) - y(\xi)) \geqslant$$

$$\geqslant B(x_m, \bar{\bar{x}})\,(y(x_m) - y((\bar{\bar{x}})) = B(x_m, \bar{\bar{x}})\,(y(\bar{x}) - y(\bar{\bar{x}})) > 0.$$

Cette assertion contredit la condition (7) du théorème, donc l'hypothèse (8) est fausse. La première assertion du théorème est démontrée.

2. Si $Sy(x) \geqslant 0$, il suffit de remplacer $y(x)$ par $(-y(x))$ $(S(-y) \leqslant 0)$ et de reprendre les raisonnements précédents. Le théorème 1 est démontré.

3. Corollaires du principe du maximum.

Corollaire 1. *Si $Sy(x) \leqslant 0$ $(Sy(x) \geqslant 0)$ sur Ω et qu'il existe au moins un nœud x_0 du réseau Ω en lequel*

$$D(x_0) > 0, \quad x_0 \in \Omega, \tag{13}$$

alors $y(x) \leqslant 0$ $(y(x) \geqslant 0)$ sur Ω.

Démonstration. Supposons que $Sy(x) \leqslant 0$. Si $y(x) \equiv \text{const}$ lorsque $x \in \Omega$, alors le calcul de la valeur de $Sy(x)$ en $x = x_0$ donne

$$Sy(x_0) = D(x_0)\, y(x_0) - \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'x_0} B(x_0, \xi)\,(y(x_0) - y(\xi)) = D(x_0)\, y(x_0) \leqslant 0.$$

D'où, en vertu de (13), il s'ensuit que $y(x) \equiv y(x_0) \leqslant 0$. Si au contraire $y(x) \not\equiv \text{const}$ pour $x \in \Omega$, alors $y(x) \leqslant 0$ en vertu du principe du maximum (pour $\Omega' = \Omega$).

La deuxième assertion du théorème se démontre de façon analogue.

Remarque 2. Si le réseau Ω contient des points frontière, la condition (13) est automatiquement réalisée pour $x \in \gamma$.

Corollaire 2. *Supposons que l'opérateur S vérifie sur Ω les conditions* (3) et (13). *Le problème* (1), (2) *possède alors une solution unique.*

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (1), (2) sous les hypothèses faites, il suffit de s'assurer que sur Ω le problème homogène $Sy(x) = 0$ (dans le cas du premier problème aux limites $Sy(x) = 0$ sur ω et $y(x) = 0$ sur γ) possède uniquement la solution triviale. Le corollaire 1 entraîne ensuite que soit $y(x) \leqslant 0$ soit $y(x) \geqslant 0$ sur Ω, puisque l'égalité $Sy(x) = 0$ est valable dans les deux cas. Ces deux conditions ne sont compatibles que lorsque $y(x) \equiv 0$ sur Ω.

4. Théorème de comparaison et estimations à priori. En utilisant le corollaire 1 du principe du maximum, on s'assure qu'est vrai l'important

Théorème 2 (théorème de comparaison). *Soit $y(x)$ une solution du problème* (1)-(3), (13) *et $\bar{y}(x)$ une solution du même problème mais avec $\bar{F}(x)$ pour second membre. La condition $|F(x)| \leqslant \bar{F}(x)$ sur Ω entraîne*

$$|y(x)| \leqslant \bar{y}(x) \quad \textit{sur } \Omega.$$

Démonstration. En vertu du corollaire 1 la fonction $\bar{y}(x) \geqslant 0$ sur Ω. Ajoutons et soustrayons les équations $Sy = F$ et $S\bar{y} = \bar{F}$:

$$S(\bar{y}+y) = \bar{F}(x) + F(x) \geqslant 0, \qquad S(\bar{y}-y) = \bar{F}(x) - F(x) \geqslant 0.$$

Le corollaire 1 entraîne que $\bar{y}(x) + y(x) \geqslant 0$ et $\bar{y}(x) - y(x) \geqslant 0$ ou $-\bar{y}(x) \leqslant y(x) \leqslant \bar{y}(x)$, $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ sur Ω, c.q.f.d.

Remarque 3. S'agissant du premier problème aux limites (4) le théorème de comparaison veut dire que les conditions

$$|F(x)| \leqslant \bar{F}(x) \text{ sur } \omega, \quad |g(x) \leqslant \bar{g}(x) \text{ sur } \gamma$$

entraînent que $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ sur Ω, où $\bar{y}(x)$ est solution du problème $S\bar{y} = \bar{F}$ sur ω, $\bar{y} = \bar{g}$ sur γ.

Donc la solution du problème (1), (2) ne peut être estimée qu'au moyen de la *fonction majorante* $\bar{y}(x)$ qui vérifie l'équation $S\bar{y} = \bar{F}(x)$ à second membre $\bar{F}(x) \geqslant |F(x)|$, par exemple $\bar{F}(x) = |F(x)|$ ou $\bar{F}(x) = \|F(x)\|_C$, etc. Dans le paragraphe suivant on cherchera une fonction majorante $\bar{y}(x)$ pour le problème discret de Dirichlet.

Le théorème de comparaison permet d'estimer immédiatement la solution du premier problème aux limites (4), (5) dans le cas d'une équation homogène.

Corollaire 3. *La solution du problème*

$$Sy = 0 \textit{ sur } \omega, \quad y = g(x) \textit{ sur } \gamma$$

est telle que

$$\max_{\omega} |(y(x)| \leqslant \max_{\gamma} |g(x)|.$$

Démonstration. Supposons que $\bar{y}(x)$ est solution du problème $S\bar{y} = 0$ sur ω, $\bar{y} = \bar{g} = |g(x)|$ sur γ.

En vertu du théorème de comparaison, on a $|y(x)| \leqslant y(x)$. Si $\bar{g}(x) \equiv$ const sur γ, et $\bar{y} \equiv$ const sur Ω, alors $\max \bar{y}(x) = \max \bar{g}$ et l'inégalité (14) est valable. Si au contraire $\bar{y}(x) \not\equiv$ const sur Ω, le principe du maximum entraîne pour $\Omega' = \omega$ que la fonction $\bar{y}(x) \geqslant 0$ ne peut pas atteindre son maximum sur ω et par conséquent $\bar{y}(x) \leqslant \max \bar{g}$, d'où il s'ensuit l'inégalité (14).

Théorème 3. *Si $D(x) > 0$ sur Ω, alors la solution $y(x)$ du problème* (1), (2), (3) *est telle que*

$$\max_{\Omega} |y(x)| \leqslant \max_{\Omega} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \tag{15}$$

Démonstration. Supposons que $\bar{y}(x)$ est solution du problème $S\bar{y} = |F(x)|$ sur Ω et par conséquent que $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$. La fonction $\bar{y}(x) \geqslant 0$ prend sa valeur maximale en un nœud $\bar{x}$: $\bar{y}(\bar{x}) = \max_{\Omega} \bar{y}(x) > 0$. En ce nœud l'équation (1) s'écrit

$$D(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) + \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi)(\bar{y}(\bar{x}) - \bar{y}(\xi)) = |F(\bar{x})|.$$

Comme $\bar{y}(\bar{x}) \geqslant \bar{y}(\xi)$, alors $D(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) \leqslant F|(\bar{x})|$ et

$$\bar{y}(\bar{x}) \leqslant \frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leqslant \max_{\Omega} \frac{|F(x)|}{D(x)}.$$

De là et de la condition $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ découle le théorème.

Théorème 4. *Supposons que le réseau Ω est divisé en deux sous-réseaux disjoints et non vides, Ω' et Ω'', dont l'un, Ω' est connexe. Si $F(x) \equiv 0$ sur Ω' et sur Ω'' $F(x) \not\equiv 0$, $D(x) > 0$, alors la solution $y(x)$ du problème* (1), (2), (3) *est telle que*

$$\max_{x \in \Omega} |y(x)| \leqslant \max_{x \in \Omega''} \frac{|F(x)|}{D(x)}. \tag{16}$$

Démonstration. Considérons la fonction majorante $\bar{y}(x)$, solution de la même équation (1) avec pour second membre $\bar{F}(x) = |F(x) \geqslant 0$ ($S\bar{y} = 0$ sur Ω', $S\bar{y} = \bar{F}(x)$ sur Ω''). Comme $\Omega'' \neq \varnothing$ et $D(x) > 0$ sur Ω'', en vertu du corollaire 2 les fonctions $y(x)$ et $\bar{y}(x)$ existent et sont uniques. Le corollaire 1 entraîne que $\bar{y}(x) \geqslant 0$ sur Ω et le théorème de comparaison, $y(x) \leqslant \bar{y}(x)$ sur Ω.

Estimons $\bar{y}(x)$. Des équations en $\bar{y}(x)$ il s'ensuit que soit $\bar{y}(x) = \text{const} > 0$ sur $\bar{\Omega}'$, soit (en vertu du principe du maximum)

$\bar{y}(x)$ ne peut pas prendre son maximum sur Ω'. Dans le second cas

$$\max_{\Omega'} \bar{y}(x) \leqslant \max_{\Omega''} \bar{y}(x). \tag{17}$$

Comme Ω' et Ω'' sont des ensembles non vides et Ω' et Ω des réseaux connexes, il vient que $\bar{\Omega}' \cap \Omega'' \neq \varnothing$, d'où il résulte que l'inégalité (17) a lieu dans le premier cas également.

Estimons le second membre de (17). Supposons que $\max \bar{y}(x)$ est atteint au nœud $x_0 \in \Omega''$. En ce nœud on aura alors

$$\bar{F}(x_0) = D(x_0)\bar{y}(x_0) + \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'(x_0)} B(x_0, \xi)(\bar{y}(x_0) - \bar{y}(\xi)) \geqslant D(x_0)\bar{y}(x_0),$$

puisque $\bar{y}(x_0) \geqslant \bar{y}(\xi)$. Il s'ensuit que

$$\max_{\Omega} \bar{y}(x) = \bar{y}(x_0) \leqslant \bar{F}(x_0)/D(x_0),$$

$$\max_{\Omega} |y(x)| \leqslant \max_{\Omega''} (|F(x)|/D(x)),$$

c.q.f.d.

§ 4. Estimations à priori et estimations de la vitesse de convergence du problème discret de Dirichlet pour l'équation de Poisson

Dans ce paragraphe on se sert du principe du maximum pour obtenir des majorations à priori pour la solution des schémas discrets examinés au § 2, et des estimations de la vitesse de convergence de ces schémas.

1. Estimations à priori pour le premier problème aux limites. Considérons le premier problème aux limites général :

$$Sy(x) = F(x) \quad \text{pour } x \in \omega, \tag{1}$$
$$y(x) = g(x) \quad \text{pour } x \in \gamma.$$

où

$$Sy(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'(x)} B(x, \xi)\, y(\xi), \tag{2}$$

et

$$A(x) > 0, \ B'_k(x, \xi) > 0, \ D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathfrak{M}'(x)} B(x, \xi) \geqslant 0. \tag{3}$$

Théorème 1. *Supposons que* $\omega = \overset{\circ}{\omega} \cup \overset{*}{\omega}$, *où* $\overset{\circ}{\omega}$ *est un réseau connexe et* $D(x) \geqslant 0$ *sur* $\overset{\circ}{\omega}$, $D(x) > 0$ *sur* $\overset{*}{\omega}$. *Le problème* (1), (2) *admet alors une solution et une seule telle que*

$$\max_{\bar{\omega}} |y(x)| \leqslant \max_{\gamma} |g(x)| + \max_{\bar{\omega}} |U(x)| + \max_{\overset{*}{\omega}} \left| \frac{F(x)}{D(x)} \right|, \tag{4}$$

où $U(x)$ est une fonction majorante, solution du problème

$$\left.\begin{aligned} &SU(x)=\bar{F}(x),\ x\in\omega,\ U(x)\geqslant 0,\ x\in\gamma,\\ &\bar{F}(x)\geqslant|F(x)|\ \textit{pour}\ x\in\overset{\circ}{\omega}\ \textit{et}\ \bar{F}(x)\geqslant 0\ \textit{pour}\ x\in\overset{*}{\omega}.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Démonstration 1. En vertu du principe du maximum le problème homogène $Sy=0$ pour $x\in\omega$, $y(x)=0$ pour $x\in\gamma$ ne possède que la solution triviale (cf. corollaire 2). Donc le problème (1), (2) possède une solution et une seule.

2. Ecrivons la solution du problème (1) sous la forme d'une somme de trois termes: $y(x)=\overset{1}{y}(x)+\overset{2}{y}(x)+\overset{3}{y}(x)$, où $\overset{i}{y}(x)$, $i=1,2,3$, sont définis par les conditions

$$\begin{aligned} &S\overset{1}{y}=0,\ x\in\omega,\ \overset{1}{y}(x)=g(x)\ \text{pour}\ x\in\gamma,\\ &S\overset{2}{y}=F(x),\ x\in\overset{\circ}{\omega},\ S\overset{2}{y}=0,\ x\in\overset{*}{\omega}\ \text{et}\ \overset{2}{y}=0\ \text{pour}\ x\in\gamma,\\ &S\overset{3}{y}=0,\ x\in\overset{\circ}{\omega},\ S\overset{3}{y}=F(x),\ x\in\overset{\circ}{\omega}\ \text{et}\ \overset{3}{y}=0\ \text{pour}\ x\in\gamma.\end{aligned}$$

Le corollaire 3 du § 3 entraîne

$$\max_{x\in\bar{\omega}}|\overset{1}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\gamma}|g(x)|.\qquad(6)$$

Estimons la fonction $\overset{2}{y}(x)$ au moyon de la fonction majorante $U(x)$ définie par les conditions (5). Le théorème 2 du § 3 entraîne

$$|\overset{2}{y}(x)|\leqslant|U(x)|\ \text{et}\ \max_{x\in\bar{\omega}}|\overset{2}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\bar{\omega}}|U(x)|.\qquad(7)$$

Comme $\overset{\circ}{\omega}$ est un domaine connexe et $D(x)>0$ pour $x\in\overset{*}{\omega}$, on peut appliquer le théorème 4 du § 3 à l'estimation de $\overset{3}{y}(x)$

$$\max_{x\in\omega}|\overset{3}{y}(x)|\leqslant\max_{x\in\overset{*}{\omega}}\left|\frac{F(x)}{D(x)}\right|.\qquad(8)$$

3. Compte tenu de l'inégalité $|y(x)|\leqslant|\overset{1}{y}(x)|+|\overset{2}{y}(x)|+|\overset{3}{y}(x)|$ et des estimations (6), (7) et (8), il vient l'inégalité (4).

De (4) il découle que la construction de la fonction majorante est un problème à part. Au pt. 3 la fonction $U(x)$ sera construite pour l'équation de Poisson.

2. Ecriture en forme canonique du problème de Dirichlet discret pour l'équation de Poisson. Pour appliquer le théorème précédent, il faut mettre les équations discrètes pour le problème de Dirichlet sous la forme (1).

Au § 2, dans le cas d'un domaine de forme générale, on a énoncé le problème de Dirichlet discret comme suit:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} &= -f(x) \text{ pour } x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y &= -f(x) \text{ pour } x \in \overset{*}{\omega}, \\ y &= g(x) \text{ pour } x \in \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où $\Lambda_\alpha^* y$ a été défini au moyen de la formule (20) du § 2:

$$\Lambda_\alpha^* y = \begin{cases} \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^*}\right), & x^{(-1_\alpha)} \in \gamma, \\ \dfrac{1}{h_\alpha}\left(\dfrac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - \dfrac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha}\right), & x^{(+1_\alpha)} \in \gamma, \end{cases}$$

où h_α^* est la distance de $x \in \overset{*}{\omega}$ à $x^{(+1_\alpha)}$ ou $x^{(-1_\alpha)}$.

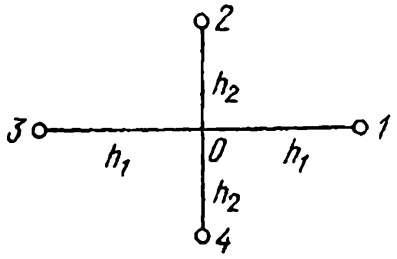


Fig. 12

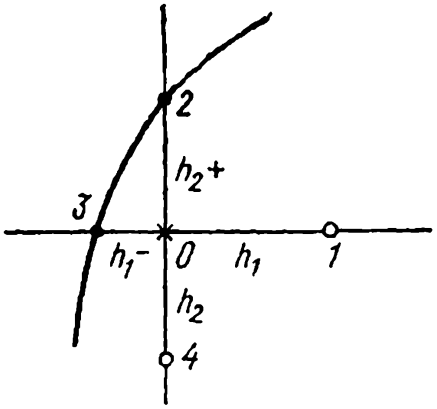


Fig. 13

Par ailleurs on a étudié le schéma suivant:

$$\begin{gathered} \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y = -f(x), \quad x \in \overset{*}{\omega}, \\ y(x) = g(x), \quad x \in \gamma, \\ \Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{h_\alpha}(y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}) = y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, \quad \hbar_\alpha = 0{,}5\,(h_\alpha + h_\alpha^*). \end{gathered} \tag{10}$$

Aux nœuds réguliers $x \in \overset{\circ}{\omega}$, l'équation $\Lambda y = -f$ a été mise sous la forme (fig. 12):

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y_0 = \frac{1}{h_1^2}(y_1 + y_3) + \frac{1}{h_2^2}(y_2 + y_4) + f_0, \quad x \in \overset{\circ}{\omega}. \tag{11}$$

Aux nœuds irréguliers $x \in \overset{*}{\omega}$ on a relativement au schéma (9) (fig. 13):

$$\left(\frac{h_1+h_1^*}{h_1^2h_1^*}+\frac{h_2+h_2^*}{h_2^2h_2^*}\right)y_0=\frac{1}{h_1^2}y_1+\frac{1}{h_2^2}y_4+f_0+\frac{1}{h_1h_1^*}g_3+\frac{1}{h_2h_2^*}g_2, \qquad (12)$$

si $x^{(-1_1)} \in \gamma$ et $x^{(+1_2)} \in \gamma$.

Si par exemple $x^{(-1_1)} \in \gamma$ et $x^{(+1_2)} \notin \gamma$ alors au lieu de (12) on obtient (fig. 14, *a*)

$$\left(\frac{h_1+h_1^*}{h_1^2h_1^*}+\frac{2}{h_2^2}\right)y_0=\frac{1}{h_1^2}y_1+\frac{1}{h_2^2}(y_2+y_4)+f_0+\frac{1}{h_2h_2^*}g_2.$$

D'où $A(x)>0$, $B(x, \xi)>0$ et $D(x)=\frac{1}{h_1h_1^*}+\frac{1}{h_2h_2^*}$

$$\text{pour } x^{(-1_1)} \in \gamma,\ x^{(+1_2)} \in \gamma,\ D(x)=\frac{1}{h_1h_1^*},\ x^{(-1_1)} \in \gamma.$$

On obtient des formules analogues pour $D(x)$ dans les cas où

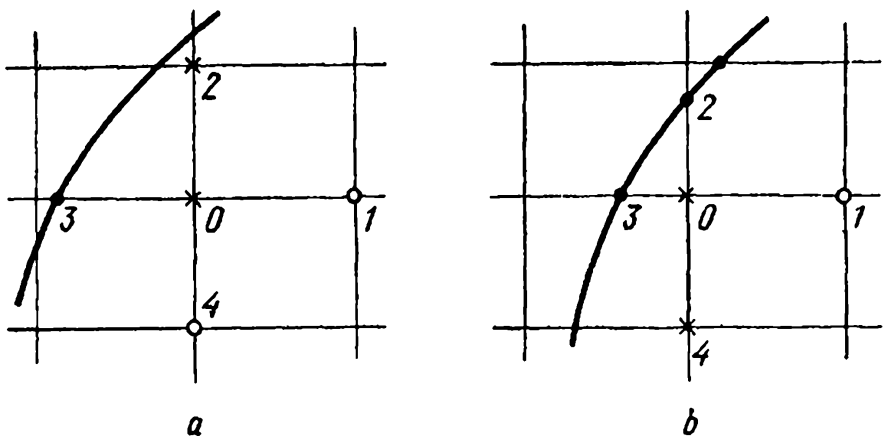


Fig. 14

$x^{(-1_1)} \in \gamma$, $x^{(+1_2)} \in \gamma$ (fig. 14, *b*), etc., ainsi que dans le cas du schéma (10). Il est aisé de remarquer que dans tous ces cas

$$D(x) \geqslant 1/h^2, \text{ où } h = \max(h_1, h_2) \text{ pour } x \in \overset{*}{\omega}. \qquad (13)$$

Si $x \in \omega$ et tous les nœuds $\xi \in \mathfrak{M}'(x)$ sont intérieurs, alors $D(x) = 0$. Si au contraire $x \in \omega$ est un nœud intérieur régulier, l'un au moins de ses nœuds voisins tombe sur la frontière, i.e. $x^{(\pm 1_1)} \in \gamma$ ou $x^{(\pm 1_2)} \in \gamma$ lorsque $D(x) > 0$. Donc

$$D(x) \geqslant 0 \text{ pour } x \in \overset{\circ}{\omega}. \qquad (14)$$

3. Estimation de l'erreur du problème. Fonction majorante. Soient $y = y(x)$ la solution du problème (9) ou (10), $u = u(x)$ celle du problème initial (1) du § 2. Soit $z(x) = y - u$ l'erreur d'approximation de la solution. En portant $y = z + u$ dans (9) on obtient

les conditions suivantes en z:

$$\Lambda z = -\psi(x),\ x \in \omega,\ \Lambda^* z = -\psi^*(x),\ x \in \overset{*}{\omega},\ z = 0,\ x \in \gamma. \quad (15)$$

Ce problème peut être mis sous la forme

$$Sz = \psi \text{ pour } x \in \overset{\circ}{\omega},\ Sz = \psi^* \text{ pour } x \in \overset{*}{\omega},\ z = 0, \text{ pour } x \in \gamma. \quad (15')$$

Construisons la fonction majorante $U(x)$ pour le problème

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{2}{S}z = \psi \quad \text{pour} \quad x \in \overset{\circ}{\omega}, & \overset{2}{S}z = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \overset{*}{\omega}, \\ \overset{2}{z} = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \gamma. & \end{array}\right\} \quad (16)$$

Supposons que l'origine des coordonnées (0, 0) est contenu dans le domaine G, et que R est le rayon du plus petit cercle centré en 0 et renfermant G. Posons

$$U(x) = \frac{K}{4}(R^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad (17)$$

où K est une constante positive que nous préciserons plus tard. Si $x = (x_1, x_2) \in G$ alors $U(x) \geqslant 0$. Comme $(x_\alpha + h_\alpha)^2 - x_\alpha^2 = 2(x_\alpha + 0{,}5h_\alpha)h_\alpha$, alors $(x_1^2)_{\bar{x}_1 x_1} = 2$, $(x_1^2)_{\bar{x}_2 x_2} = 0$ et $(\Lambda_1 + \Lambda_2)(x_1^2 + x_2^2) = 4$, i.e. $\Lambda U = -K$ pour $x \in \overset{\circ}{\omega}$.

Aux nœuds irréguliers $x \in \overset{*}{\omega}$, on a relativement au schéma (9) pour $x^{(-1_1)}$, $x^{(+1_2)} \in \gamma$ ou bien $x^{(+1_1)}$, $x^{(-1_2)} \in \gamma$, etc.

$$\Lambda^* U = -K\left(\frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{h_2 + h_2^*}{4h_2}\right) = -\varkappa K,\ \varkappa > \frac{1}{2}.$$

Si seul $x^{(-1_1)} \in \gamma$, alors

$$\Lambda^* U = -K\left(\frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{1}{2}\right),\quad \varkappa = \frac{h_1 + h_1^*}{4h_1} + \frac{1}{2} > \frac{3}{4}.$$

Donc $\Lambda^* U = -\varkappa K$, $\varkappa > \frac{1}{2}$ pour $x \in \overset{*}{\omega}$. En comparant les équations

$$SU = K,\ x \in \overset{\circ}{\omega};\ SU = \varkappa K,\ \varkappa > \frac{1}{2},\ x \in \overset{\circ}{\omega};\ U(x) \geqslant 0,\ x \in \gamma$$

avec les équations (16), on remarque que $K = \max\limits_{x \in \overset{\circ}{\omega}} |\psi(x)|$. Alors

$$U(x) \geqslant |\overset{2}{z}(x)|.$$

On a donc

$$0 \leqslant U(x) \leqslant \frac{R^2}{4} K = \frac{R^2}{4} \max_{x \in \overset{\circ}{\omega}} |\psi(x)|.$$

Comme $D(x) \geqslant 0$ pour $x \in \overset{\circ}{\omega}$ et $D(x) \geqslant 1/h^2$ pour $x \in \overset{*}{\omega}$ en appliquant le théorème 1, on obtient la majoration suivante pour la

solution du problème (15) :

$$\max_{\omega} |z(x)| = \max_{\omega} |y(x) - u(x)| \leqslant \frac{R^2}{4} \max_{\overset{\circ}{\omega}} |\psi(x)| + h^2 \max_{\overset{*}{\omega}} |\psi^*(x)|. \tag{18}$$

D'où il s'ensuit le

Théorème 2. *Si la solution du problème* (1), (2) *du* § 2 $u(x) \in C^4(\bar{G})$, *les solutions des problèmes discrets* (9) *et* (10) *convergent uniformément à la vitesse* $O(|h|^2)$:

$$\max_{x \in \omega} |y(x) - u(x)| \leqslant M |h|^2,$$

où $M = \text{const} > 0$ *ne dépend pas de* h_1, h_2, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

4. Schémas d'ordre supérieur de précision. Considérons le schéma (8), (9) du § 2 avec l'erreur $O(|h|^4)$. Il est défini sur le stencil de neuf points en « tiroir », représenté sur la fig. 15, et s'écrit

$$\begin{aligned} \Lambda' y &= (\Lambda_1 + \Lambda_2) y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = \\ &= -\varphi(x), \quad x \in \omega, \\ y &= g(x) \text{ pour } x \in \gamma, \quad \varphi(x) = \\ &= f + \frac{1}{12}(h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f), \end{aligned} \tag{19}$$

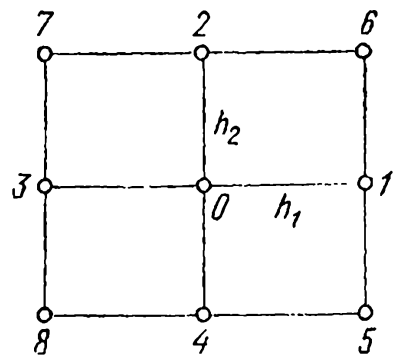


Fig. 15

où ω est un réseau sur le rectangle $\{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$, $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ (dans ce cas tous les nœuds intérieurs sont réguliers).

Ecrivons l'équation $\Lambda' y = -\varphi$ sous la forme canonique $Sy = \varphi(x)$, où $Sy = -\Lambda' y$. En remplaçant $\Lambda_1 y$ et $\Lambda_2 y$ par leurs expressions, on obtient (cf. fig. 15) *)

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y(0) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)(y(1) + y(3)) + \\ + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right)(y(2) + y(4)) + \\ + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)(y(5) + y(6) + y(7) + y(8)). \end{aligned}$$

En comparant avec (1), on constate que

$$A(x) = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) > 0;$$

$$B(x, \xi) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) > 0, \quad \xi = 5, 6, 7, 8;$$

*) Le stencil n'est constitué que de 7 nœuds pour $h_1 = \sqrt{5}\, h_2$ et $h_2 = \sqrt{5}\, h_1$.

$$B(x, \xi) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right) \geqslant 0, \quad \xi = 1, 3;$$

$$B(x, \xi) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) \geqslant 0, \quad \xi = 2, 4;$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{h_2}{h_1} \leqslant \sqrt{5}. \tag{20}$$

Le principe du maximum est applicable au schéma (19) moyennant la condition (20) : il est évident que $D(x) \equiv 0$ pour $x \in \omega$ et $D(x) = A(x) = 1$ pour $x \in \gamma$. La fonction majorante $U(x)$ peut être prise sous la forme

$$U(x) = \frac{K}{4}(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Comme $\Lambda_1 \Lambda_2 U = 0$ il vient $\Lambda' U = \Lambda U = -K$. On peut donc poser $K = \max\limits_{\omega} |\psi(x)|$. Le domaine G étant rectangulaire et le réseau $\overline{\omega}$ régulier en x_1 et x_2, tous les nœuds intérieurs du réseau sont réguliers. On a l'estimation suivante

$$0 \leqslant U(x) \leqslant \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \max_{\omega} |\psi(x)|.$$

Finalement on s'assure que pour l'erreur $z(x) = y(x) - u(x)$ du schéma (19) on a la majoration

$$\max_{\omega} |y(x) - u(x)| \leqslant \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \max_{\omega} |\psi(x)|. \tag{21}$$

Si la solution du problème initial $u(x) \in C^{(6)}(\overline{G})$, le schéma (19) converge uniformément à la vitesse $O(|h|^4)$ (i.e. possède un quatrième degré de précision) sous la condition (20).

La condition (20) est automatiquement remplie sur le réseau carré $h_1 = h_2 = h$. La majoration (21) peut donc être utilisée pour le schéma (8), (9) du § 1, qui diffère de (19) seulement par l'expression de $\varphi(x)$. De (21) il résulte que ce schéma converge uniformément à la vitesse $O(h^6)$ (est du sixième ordre de précision) si $u(x) \in C^{(8)}(\overline{G})$.

5. Schémas pour équation en coordonnées polaires et cylindriques. Revenons maintenant au problème (13) du § 2.

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y = -f(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \omega, \\ &y(r, \varphi) = y(r, \varphi + 2\pi), \quad (r, \varphi) \in \omega, \quad y = g(\varphi), \quad (r, \varphi) \in \gamma, \\ &\overline{\Delta}_r y = \frac{1}{r}(\rho y_{\bar{r}})_r, \quad \rho = r - 0{,}5h_r, \quad \Delta_\varphi y = \frac{1}{r^2} y_{\bar{\varphi}\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(la frontière γ est composée de nœuds (R, φ_m).

Le schéma (22) approche le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson dans le cercle $0 \leqslant r \leqslant R$ de rayon R:

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \varphi), \quad 0 < r < R, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

$$r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad u = g(\varphi) \quad \text{pour} \quad r = R, \tag{23}$$

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi) \qquad (0 < r < R, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Mettons l'équation (22) sous la forme (1). Il est évident que $x = (r_n, \varphi_m)$, $\mathfrak{M}(x) = \{(r_{n-1}, \varphi_m), (r_{n+1}, \varphi_m), (r_n, \varphi_{m-1}), (r_n, \varphi_{m+1}), (r_m, \varphi_m)\}$ pour $r \neq 0{,}5h_r$ et $r \neq R$, $\mathfrak{M}(x) = \{(r_1, \varphi_m), (r_0, \varphi_{m-1}), (r_0, \varphi_{m+1}), (r_0, \varphi_m)\}$ pour $r = 0{,}5h_r$.

La forme de $\overline{\Lambda}_r$ et Λ_φ entraîne que les conditions (2) sont réalisées pour le problème (22) et de plus que $D(x) = 0$ en tous les nœuds intérieurs $x = (r_n, \varphi_m)$, $n < N$ $(r_n < R)$. Le réseau est composé uniquement de nœuds intérieurs réguliers. En chacun de ces nœuds est valable l'estimation

$$\psi = \overline{\Lambda}_r u + \Delta_\varphi u + f(r, \varphi) = O\left(\frac{h_r^2 + h_\varphi^2}{r}\right), \tag{24}$$

établie au § 1, si $u \in C^{(4)}(\overline{G})$.

Composons la fonction majorante

$$U(r, \varphi) = K(R - r), \quad K = \text{const} > 0,$$

pour estimer la solution du problème (22) avec $y|_\gamma = 0$. Appliquons à U l'opérateur $\Lambda = \overline{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi$. Comme U ne dépend pas de φ, que $\Lambda_\varphi U = 0$ et que

$$\frac{1}{r}(\rho U_{\bar r})_r = -\frac{K}{h_r r}((r + 0{,}5h_r) - (r - 0{,}5h_r)) = \frac{K}{r},$$

il vient $\Delta U = -\frac{K}{r}$ pour $x = (r, \varphi) \in \omega$, $U(R, \varphi) = 0$. Exigeons que $K \geqslant r|f(r, \varphi)|$ pour tous les $x = (r, \varphi) \in \omega$. Ceci aura lieu si l'on pose $K = \max\limits_{\omega} |rf(r, \varphi)|$. De là et du théorème 1 il résulte le

Théorème 3. *Le problème* (22) *admet une solution et une seule telle que*

$$\max_{\overline{\omega}} |y(x)| \leqslant \max_{\omega_\varphi} |g(\varphi)| + R \max_{\omega} |rf(r, \varphi)|. \tag{25}$$

Si la solution de l'équation différentielle $u(r, \varphi)$ possède quatre dérivées bornées par rapport à x_1 et x_2, le schéma (22) *est uniformément convergent au deuxième ordre* (*i.e. possède un deuxième ordre de précision*).

Démonstration. 1. Les conditions du théorème 1 sont remplies. On peut donc se servir de la majoration (4) et y porter

$$\max_{\omega} |U| \leqslant KR = R \max_{\omega} |rf(r, \varphi)|.$$

2. Pour l'approximation $z = y - u$ on a le problème

$$\bar{\Delta}_r z + \Delta_\varphi z = -\psi, \quad (r, \varphi) \in \omega, \quad z = 0 \text{ pour } r = R, \tag{26}$$

avec une condition aux limites homogène. La majoration à priori (25) entraîne

$$\max_\omega |z(r, \varphi)| \leqslant R \max_\omega |r\psi(r, \varphi|. \tag{27}$$

En portant ici la majoration (24) ou $|r\psi| = O(h_r^2 + h_\varphi^2)$, il vient $\max |z| \leqslant M(h_r^2 + h_\varphi^2)$, où $M = \text{const} > 0$ ne dépend ni de h_r ni de h_φ. Le théorème est démontré.

Supposons que dans le cylindre circulaire (cf. §§ 1 et 2)

$$\bar{G} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2, \quad 0 \leqslant x_3 = z \leqslant l\}$$

on demande de trouver une solution de l'équation de Poisson prenant des valeurs données sur la surface de ce cylindre. En coordonnées cylindriques ce problème se pose comme suit: trouver la solution, bornée dans $\bar{G}$, de l'équation

$$\Delta_{r,\varphi,z} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(r, \varphi, z), \tag{28}$$

qui est périodique en φ et vérifie la condition aux limites $u(r, \varphi, z) = g(r, \varphi, z)$ pour $r = R$, $0 \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ et pour $z = 0$, l, $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Introduisons dans le cylindre le schéma décrit au § 1:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r \times \omega_\varphi \times \bar{\omega}_z = \{(r, \varphi, z) \mid r \in \bar{\omega}_r, \ \varphi \in \omega_\varphi, \ z \in \bar{\omega}_z\},$$

$$\bar{\omega}_r = \{r_n = (n + 0{,}5)h_r, \ n = 0, 1, 2, \ldots N, \ h_r = R/(N + 0{,}5)\},$$

$$\bar{\omega}_\varphi = \{\varphi_m = mh_\varphi, \ m = 0, 1, 2, \ldots, M - 1, \ h_\varphi = 2\pi/M\},$$

$$\bar{\omega}_z = \{z_k = kh_z, \ k = 0, 1, 2, \ldots, I, \ h_z = l/I\}.$$

La frontière γ est composée des nœuds (R, φ_m, z_k), $(r_n, \varphi_m, 0)$ et (r_n, φ_m, l). L'ensemble des nœuds intérieurs est $\omega = \bar{\omega} \setminus \gamma$. Tous les nœuds sont réguliers, i.e. $\overset{\circ}{\omega} = \omega$. Sur le réseau $\bar{\omega} = \Omega$ le schéma discret du problème (28) s'écrit

$$\bar{\Lambda} y = \bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y + \Lambda_z y = -f(r, \varphi, z), \ x = (r, \varphi, z) \in \omega,$$
$$y = g(r, \varphi, z) \quad \text{pour} \quad x \in \gamma, \tag{29}$$

où $\Lambda_z y = y_{\bar{z}z}$, $(\bar{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi)$ est l'opérateur du problème (22). En écrivant (29) sous sa forme canonique (1), on s'assure que toutes les conditions (2) sont réalisées, $\bar{\omega} = \Omega$ et $D(x) \equiv 0$ pour $x \in \omega$. Pour appliquer le théorème 1 il suffit de composer une fonction majorante $U = U(r, \varphi, z)$.

Il est aisé de remarquer que la fonction $U = K(R - r)$ peut être fonction majorante pour le problème (29) avec des conditions

aux limites homogènes. Donc le théorème 3 est également valable pour le problème de Dirichlet discret posé pour un cylindre (29). Dans ce cas l'erreur d'approximation $\psi = \frac{1}{r}(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_z^2)$ et pour l'approximation $z = y - x$ on a la majoration

$$\max_{\omega} |y - u| \leqslant M (h_r^2 + h_\varphi^2 + h_z^2),$$

où $M = \text{const} > 0$ ne dépend pas des pas du réseau. Donc le réseau (29) admet un deuxième ordre de précision.

6. Problème de Dirichlet discret pour l'équation de Poisson en coordonnées sphériques. Supposons que sur la boule $\bar{G} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$ on demande de trouver une solution de l'équation de Poisson prenant des valeurs données sur la sphère. En coordonnées sphériques, ce problème s'énonce comme suit : trouver dans $\bar{G}$ la solution continue de l'équation

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) =$$
$$= -f(r, \varphi, \theta) \text{ pour } 0 < r < R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad (30)$$

qui vérifie la condition aux limites

$$u(r, \varphi, \theta) = g(\varphi, \theta) \text{ pour } r = R, \quad (30')$$

les contraintes

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ pour } r = 0; \quad \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \text{ pour } \theta = 0, \pi \quad (30'')$$

et la condition de périodicité en φ

$$u(r, \varphi, \theta) = u(r, \varphi, + 2\pi, \theta), \quad 0 < \varphi \leqslant 2\pi. \quad (30''')$$

On a composé un schéma discret pour ce problème aux §§ 1, 2. Introduisons le réseau

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r \times \omega_\varphi \times \omega_\theta = \{(r, \varphi, \theta) \mid r \in \bar{\omega}_r,\ \varphi \in \omega_\varphi,\ 0 \in \omega_\theta\},$$

où ω_φ sont définis plus haut, et

$$\bar{\omega}_r = \{r_n = (n + 1) h_r,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1,\ h_r = R/N\},$$
$$\bar{\omega}_\theta = \{\theta_i = (i + 0{,}5) h_\theta,\ i = 0, 1, \ldots, I - 1,\ h_\theta = \pi/I\}.$$

La frontière γ du réseau est composée des nœuds (R, φ_m, θ_i)

$$\gamma = \{(R, \varphi_m, \theta_i) \mid (\varphi_m, \theta_i) \in \omega_\varphi \times \omega_\theta\}.$$

L'ensemble des nœuds intérieurs est

$$\omega = \bar{\omega} \setminus \gamma = \{(r, \varphi, \theta) \mid r < R_1\ (\varphi, \theta) \in \omega_\varphi \times \omega_\theta\}.$$

Sur le réseau $\bar{\omega} = \Omega$, le schéma discret pour le problème (30) s'écrit

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\Lambda} y = \bar{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y + \bar{\Lambda}_\theta y = -f(r, \varphi, \theta), \ x = (r, \varphi, \theta) \in \omega, \\ y = g(\varphi, \theta) \text{ pour } r = R, \ y(r, \varphi, \theta) = y(r, \varphi + 2\pi, \theta), \end{array}\right\} \quad (31)$$

où $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}_r + \bar{\Lambda}_\varphi + \bar{\Lambda}_\theta$ est défini par les formules (39), (40), (41) du § 1. Récrivons-les sous la forme:

$$\bar{\Lambda}_r y = \frac{1}{r^2}(\rho y_{\bar{r}})_r \quad \rho = r(r - h_r), \quad r = (n+1)h_r, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\Lambda_\varphi y = \frac{1}{r^2 \sin\theta} y_{\bar{\varphi}\varphi}, \quad \bar{\Lambda}_\theta y = \frac{1}{r^2 \sin\theta}(\sin\bar{\theta} y_{\bar{\theta}})_\theta, \quad \bar{\theta}_i = \theta_i - \frac{1}{2}h_\theta = ih_\theta,$$

de sorte que $\rho_n = 0$ pour $n = 0$, $\bar{\theta}_i = 0$ pour $i = 0$, $\bar{\theta}_i = \pi$ pour $i = I$.

En écrivant le schéma (31) sous la forme canonique (1) pour $\Omega = \bar{\omega}$, on constate que celui-ci vérifie les conditions (2) et $D(x) \equiv 0$ pour tous les $x = (r_n, \varphi_m, \theta_i) \in \omega$. Composons la fonction majorante

$$U(r, \varphi, \theta) = K(R - r\sin\theta), \quad (32)$$

où $K = \text{const} > 0$ pour le problème (31) avec la condition aux limites homogène $y = 0$ pour $r = R$.

Calculons $(\bar{\Lambda}_r + \Lambda_\varphi + \bar{\Lambda}_0)U = \bar{\Lambda}_r U + \bar{\Lambda}_\theta U$.

En remarquant que

$$\bar{\Lambda}_r r = \frac{1}{r^2}(\rho r_{\bar{r}})_r = \frac{1}{r^2 h_r}(\rho^{(+1_r)} - \rho) = \frac{1}{r^2 h_r}(r(r + h_r) - r(r - h_r)) = \frac{2}{r},$$

$$(\sin\bar{\theta}(\sin\theta)_{\bar{\theta}})_{\theta, i} = \frac{1}{h_\theta^2}(\sin\theta_{i+0,5}(\sin\theta_{i+1} - \sin\theta_i) -$$

$$- \sin\theta_{i-0,5}(\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1})) = \frac{1}{h_\theta^2}\sin\frac{h_\theta}{2}(\sin 2\theta_{i+0,5} - \sin 2\theta_{i-0,5}) =$$

$$= \frac{2}{h_\theta^2}\sin\frac{h_\theta}{2}\sin h_\theta \cos 2\theta_i,$$

il vient

$$\bar{\Lambda} U = -\bar{F}, \ x \in \omega; \quad U = KR(1 - \sin\theta) \geqslant 0, \ x \in \gamma, \quad (33)$$

où

$$\bar{F} = \frac{K}{r\sin\theta}(2\sin^2\theta + \varkappa\cos 2\theta) > 0, \quad \varkappa = \frac{\sin h_\theta}{h_\theta} \cdot \frac{\sin 0{,}5 h_\theta}{0{,}5 h_\theta}.$$

Comme la fonction $\varphi(\alpha) = (\sin\alpha)/\alpha$ est monotone décroissante pour $0 < \alpha < \pi/2$ on a l'encadrement suivant: $4\sqrt{2}/\pi^2 \leqslant \varkappa < 1$ quel que soit $h_\theta \leqslant \pi/2$. En vertu du théorème de comparaison du § 3, la fonction U est majorante pour la solution du problème (31) qui

vérifie la condition homogène $y = 0$ pour $x = (R, \varphi, \theta) \in \gamma$ si $\overline{F}(x) \geqslant |f(x)|$. Cette inégalité est vérifiée pour $r \sin\theta\, \overline{F}(x) = K(2\sin^2\theta + \varkappa(1 - 2\sin^2\theta)) \geqslant \varkappa K > r \sin\theta\, |f(x)|$.

Pour cela il suffit de poser

$$\varkappa K = \max_{\omega} |r \sin\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

D'où l'on déduit la condition sur K

$$K = \frac{1}{\varkappa} \max_{\omega} |r \sin\theta f(r, \varphi, \theta)| \leqslant \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} \max_{\omega} |r \sin\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

S'agissant de $U(x)$, on a

$$U(x) = U(r, \varphi, \theta) \leqslant KR < 2R \max_{\omega} |r \sin\theta f(r, \varphi, \theta)|.$$

En appliquant le théorème 1 au problème (31), on s'assure que:

1) le problème (31) possède une solution et une seule telle que

$$\max_{\omega} |y(r, \varphi, \theta)| \leqslant \max_{\omega_\varphi \times \omega_\theta} |g(\varphi, \theta)| + 2R \max_{\omega} |r \sin\theta f(r, \varphi, \theta)|, \quad (34)$$

2) le schéma (31) possède un deuxième ordre de précision si la solution u du problème (30) en tant que fonction des variables cartésiennes x_1, x_2, x_3 possède dans $\overline{G}$ des dérivées quatrièmes bornées:

$$\max_{\omega} |y(r, \varphi, \theta) - u(r, \varphi, \theta)| \leqslant M(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_\theta^2),$$

où $M = \text{const} > 0$ ne dépend pas de h_r, h_φ, h_θ.

La première assertion découle aussitôt du théorème 1. Pour estimer le degré de précision, considérons le problème

$$\overline{\Lambda} z = \overline{\Lambda}_r z + \Lambda_\varphi z + \overline{\Lambda}_\theta z = -\psi(r, \varphi, \theta), \quad x = (r, \varphi, \theta) \in \omega,$$
$$z = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \gamma.$$

L'erreur d'approximation ψ a été étudiée au § 1 ; on sait que

$$\psi(r, \varphi, \theta) = O\left(\frac{h_r^2}{r} + \frac{h_\varphi^2 + h_\theta^2}{r \sin\theta}\right). \quad (35)$$

En se servant de la majoration (34), on obtient

$$\max_{\omega} |y - u| \leqslant 2R \max_{\omega} |r \sin\theta \cdot \psi(r, \varphi, \theta)|, \quad (36)$$

donc

$$\max_{\omega} |y(r, \varphi, \theta) - u(r, \varphi, \theta)| = O(h_r^2 + h_\varphi^2 + h_\theta^2).$$

Voir aussi [3], [4], [11].

CHAPITRE IV

SCHÉMAS DISCRETS POUR LES PRINCIPAUX PROBLÈMES AUX LIMITES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Dans ce paragraphe on se propose de construire les approximations discrètes des problèmes aux limites les plus typiques posés pour les principales équations de la physique mathématique. On traitera les problèmes aux limites pour des équations du second ordre, pour un système d'équations de Lamé et pour une équation biharmonique.

§ 1. Problèmes aux limites pour équations du second ordre

Nous étudierons dans ce paragraphe la position des principaux problèmes aux limites des équations différentielles du second ordre et indiquerons certaines conditions de conjugaison.

1. Equations du second ordre. On rappelle que la plus simple équation elliptique du second ordre est l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, qui, en dimension deux, s'écrit

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \tag{1}$$

Au § 1 chap. I on a montré que l'équation de Laplace servait à décrire, par exemple, la loi de la distribution stationnaire de la température dans un milieu isotrope homogène ne contenant pas de sources intérieures, la diffusion établie et de nombreux autres processus physiques.

Si le milieu contient des sources intérieures, les processus indiqués sont décrits par l'équation de Poisson

$$\Delta u = -f(x),\ x = (x_1, x_2, x_3),$$

où la fonction $f(x)$ représente la densité de distribution des sources.

Si la densité de distribution des sources ne dépend pas de la variable x_3, on a vu au § 1 du chap. I que dans de nombreux cas la solution cherchée ne dépend pas de x_3 et l'équation de Poisson peut

alors être mise sous la forme

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x = (x_1, x_2). \tag{2}$$

Dans toute la suite on supposera que la solution cherchée dépend uniquement des variables x_1, x_2 et pas de la variable x_3, i.e. $u = u(x_1, x_2)$. Cela signifie que le processus décrit se déroule dans un corps limité par une surface cylindrique dont la génératrice est parallèle à l'axe Ox_3. Ceci étant on supposera que le problème est posé dans un domaine constitué par l'intersection de ce cylindre avec le plan $x_3 = \text{const}$.

Pour décrire les processus ayant lieu dans un milieu non homogène, nous aurons besoin d'équations différentes de l'équation (2). Ainsi, la distribution de la température dans un milieu dont le coefficient de conductivité k varie d'un point à l'autre, i.e. $k = k(x)$, sera décrite par l'équation

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \quad x = (x_1, x_2). \tag{3}$$

Si d'autre part la propagation de la chaleur dépend de la direction, i.e. le milieu est anisotrope, en choisissant dûment les variables indépendantes on peut mettre l'équation sous la forme

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \tag{4}$$

où $k_1(x)$ est le coefficient de conductibilité thermique sur l'axe Ox_1, et $k_2(x)$ sur l'axe Ox_2.

La densité des sources peut être une fonction donnée du point x comme elle peut dépendre de la solution cherchée $u(x)$. Si la densité des sources dépend linéairement de la température, il faut ajouter au second membre de (4) la quantité $q(x)\,u$. Si la densité des sources dépend en plus du flux de chaleur, le second membre de (4) prend la forme suivante:

$$-\left(b_1(x)\,k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x)\,k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q(x)\,u + f(x)\right).$$

En portant cette expression dans (4), on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \\ + r_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + r_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q(x)\,u + f(x) = 0, \tag{5}$$

où $r_1 = b_1 k_1$, $r_2 = b_2 k_2$.

Les équations (1) à (4) peuvent être considérées comme des cas particuliers de l'équation (5).

Parfois on aura intérêt à faire un changement de variables dans le but de simplifier dans la mesure du possible le domaine où l'on cherche la solution. Ce changement peut faire apparaître des dérivées mixtes dans l'équation (5). Dans les nouvelles variables (on garde les anciennes notations) l'équation (5) prendra la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{21}(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+r_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+r_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}-q(x)u+f(x)=0. \quad (6)$$

L'équation (6) étant elliptique, ses coefficients $k_{\alpha\beta}(x)$ constituent une forme quadratique définie, i.e.

$$|k_{11}(x)\xi_1^2+(k_{12}(x)+k_{21}(x))\xi_1\xi_2+k_{22}(x)\xi_2^2|\neq 0 \text{ pour } \xi_1^2+\xi_2^2\neq 0.$$

Ceci aura lieu si

$$4k_{11}(x)k_{22}(x)>(k_{12}(x)+k_{21}(x))^2.$$

L'expression (6) est la forme la plus générale de l'équation elliptique linéaire de second ordre dans le plan.

2. Conditions de conjugaison pour équations du second ordre. Considérons le problème de la distribution stationnaire de la chaleur dans deux corps isotropes en contact. Les équations qui décrivent la distribution de la température dans chacun d'eux sont de la forme (3). Supposons que $k_1(x)$ et $u_1(x)$ sont le coefficient de conductibilité thermique et la température du premier corps, $k_2(x)$ et $u_2(x)$ le coefficient du conductibilité thermique et la température du second corps. Si le contact entre les deux corps s'opère suivant une surface cylindrique S de directrice C, et d'équation $\varphi(x_1, x_2)=0$, les coefficients de conductibilité thermique $k_1(x)$ et $k_2(x)$ seront différents sur cette courbe. Supposons que le contact soit parfait, i.e. les températures et les flux de chaleur se confondent sur les surfaces de contact des deux corps. Ce qui se traduit par la réalisation sur la courbe $\varphi(x_1, x_2)=0$ de conditions de la forme:

$$u_2(x)-u_1(x)=0,\quad k_2\frac{\partial u_2}{\partial n}(x)-k_1\frac{\partial u_1}{\partial n}(x)=0,\quad x\in C,$$

où n est la normale à C. Ces conditions portent le nom de *conditions de conjugaison.*

Si la surface de contact est un plan défini par l'équation $x_1=\overset{\circ}{x}_1$, les conditions de conjugaison s'écrivent:

$$\begin{gathered} u_2(\overset{\circ}{x}_1, x_2)-u_1(\overset{\circ}{x}_1, x_2)=0,\\ k_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\overset{\circ}{x}_1, x_2)-k_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\overset{\circ}{x}_1, x_2)=0. \end{gathered} \quad (8)$$

Dans la suite les valeurs de la température des deux corps seront notées par la même lettre u, et les coefficients de conductibilité thermique par la même lettre k. L'ensemble de ces deux corps pourra alors être considéré comme un seul, mais avec un coefficient de conductibilité thermique discontinu. Il est plus commode d'écrire les conditions de conjugaison (8) sous la forme:

$$\begin{gathered} u(\mathring{x}_1+0, x_2)-u(\mathring{x}_1-0, x_2)=[u]_{x=\mathring{x}}=0, \\ k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1+0, x_2)-k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathring{x}_1-0, x_2)=\left[k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]_{x=\mathring{x}}=0, \end{gathered} \tag{8}$$

où $\mathring{x}=(\mathring{x}_1, x_2)$.

Les conditions de conjugaison (9) ne sont pas les seules conditions que l'on puisse donner sur la surface de contact des corps. Examinons un autre modèle de contact. Supposons qu'une couche faiblement

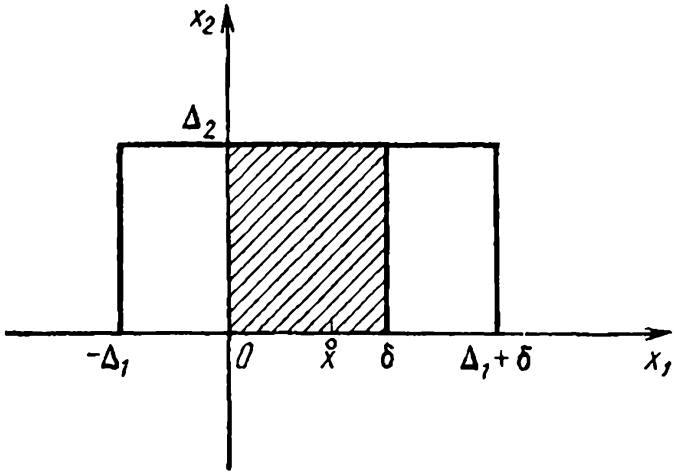


Fig. 16

conductrice ait été intercalée entre deux corps plans de coefficient de conductibilité thermique $k(x)$. On supposera que le contact est parfait entre les corps et la couche. Supposons, pour la simplicité, que les surfaces de contact sont planes et d'équation $x_1=0$ et $x_1=\delta$. Découpons mentalement dans le corps obtenu un prisme de section (fig. 16)

$$\Pi=\{-\Delta_1<x_1<\delta+\Delta_1,\ 0<x_2<\Delta_2\}.$$

En vertu de (3) et (9) il vient

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f \text{ pour } -\Delta_1<x_1<0, \\ \delta<x_1<\delta+\Delta_1,\ 0<x_2<\Delta_2, \\ \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=-f \text{ pour } 0<x_1<\delta,\ 0<x_2<\Delta_2 \end{gathered} \tag{10}$$

$$[u]|_{x_1=0}=0,\quad \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}-k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=0,$$

$$[u]|_{x_1=\delta}=0,\quad k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\delta+0}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\delta-0}=0, \tag{11}$$

où $\varepsilon = \text{const}$ est le coefficient de conductibilité thermique de la couche. Intégrons la première équation sur le domaine $-\Delta_1 < x_1 < 0$, $0 < x_2 < \Delta_2$, la seconde sur le domaine $0 < x_1 < \overset{\circ}{x}_1$, $0 < x_2 < \Delta_2$, où $\overset{\circ}{x}_1 \in (0, \delta)$, et ajoutons les expressions obtenues. En se servant des conditions (11) on obtient en définitive

$$\int_2^{\Delta_2}\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overset{\circ}{x}_1, x_2)-k\frac{\partial u}{\partial x_1}(-\Delta_1, x_2)\right]dx_2+$$

$$+\int_0^{\Delta_2}dx_2\Big[\int_{\Delta_1}^{0}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)dx_1+$$

$$+\int_0^{\overset{\circ}{x}_1}\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)\,dx_1+\int_{-\Delta_1}^{\overset{\circ}{x}_1}f(x_1, x_2)\,dx_1\Big|=0.$$

Divisons cette expression par Δ_2 et faisons tendre Δ_1 et Δ_2 vers zéro :

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overset{\circ}{x}_1, 0)-k(0, 0)\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, 0)+$$

$$+\int_0^{\overset{\circ}{x}_1}(\delta-x_1)\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, 0)+f(x_1, 0)\right]dx_1=0.$$

Intégrons l'expression obtenue sur $\overset{\circ}{x}_1$ entre 0 et δ :

$$\varepsilon[u(\delta, 0)-u(0, 0)]-\delta k(0, 0)\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, 0)+$$

$$+\int_0^{\delta}(\delta-x_1)\left[\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, 0)+f(x_1, 0)\right]dx_1=0,$$

puis divisons par δ et faisons tendre ε et δ vers zéro de sorte que $\varepsilon/\delta = \varkappa = \text{const}$. En définitive on obtient

$$\varkappa[u]|_{x_1=0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}. \tag{12}$$

De façon analogue on trouve la deuxième condition de conjugaison

$$\varkappa[u]|_{x_1=0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}. \tag{13}$$

(12) et (13) entraînent en particulier que sur la ligne de contact le flux de chaleur est continu

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}=k\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0},$$

et que la température est généralement discontinue.

Les conditions de conjugaison (12), (13) peuvent être interprétées comme les conditions d'un contact imparfait. Sur leur surface de contact les corps possèdent des températures différentes dont le saut est proportionnel au flux de chaleur.

Il existe d'autres conditions de conjugaison pour l'équation (3). Distinguons parmi elles:

$$[u]=0,\ \left[k\frac{\partial u}{\partial n}\right]=-\alpha(x),\quad x\in C. \tag{14}$$

Ces conditions entraînent que sur la surface de contact, la température est continue et le flux de chaleur subit un saut donné. Ce qui veut dire que sur la surface S sont distribuées des sources concentrées avec la densité $\alpha(x)$.

3. Principaux problèmes aux limites pour équations du second ordre. Examinons maintenant les conditions aux limites pour les équations du second ordre. Les conditions aux limites les plus simples sont les conditions de premiere espèce, i.e. les conditions de la forme

$$u(x)=g(x)\ \text{pour}\ x\in\Gamma, \tag{15}$$

où Γ est la frontière du domaine G dans lequel est donnée par exemple l'équation (6). S'agissant du problème de la chaleur, les conditions (15) définissent la température du corps sur la surface.

Si le flux (de chaleur) est donné sur la frontière, on obtient le second problème aux limites. Si le corps est isotrope, i.e. le processus est décrit par l'équation (3), les conditions de seconde espèce, en vertu du § 1 du chap. I, s'écrivent

$$k\frac{\partial u}{\partial n}=-g(x),\quad x\in\Gamma. \tag{16}$$

Ici n est la normale intérieure à la frontière Γ.

Sur la frontière Γ on donne souvent une condition de troisième espèce, i.e. une condition de la forme

$$k\frac{\partial u}{\partial n}=\varkappa(u-u_0)=\varkappa u-g(x),\quad x\in\Gamma, \tag{17}$$

où $\varkappa(x)$ et $u_0(x)$ sont des fonctions données, $g(x)=\varkappa(u)\,u_0(x)$. Les conditions (17) expriment le fait que l'échange de chaleur entre le corps et le milieu ambiant obéit à la loi de Newton, $\varkappa(x)$ étant le coefficient d'échange thermique, $u_0(x)$, la température du milieu ambiant. Les conditions aux limites de seconde espèce (16) sont

un cas particulier des conditions aux limites de troisième espèce (17) pour $\varkappa \equiv 0$.

Si l'on se place dans le cas de l'équation (6), l'analogue de la condition (17) est la condition

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{2} k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \cos(n, x_\alpha) = \varkappa u - g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{18}$$

où n est la normale intérieure à la frontière Γ, $\partial u/\partial N$, la dérivée suivant la conormale. Lorsque $k_{12} = k_{21} = 0$ et $k_{11} = k_{22} = k$ la condition (18) se transforme en la condition (17).

Pour l'équation (6) ou pour l'un quelconque de ses cas particuliers, on peut poser le problème à dérivée gauche, i.e. le problème consistant à chercher une solution de l'équation (6) vérifiant sur la frontière la condition aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \varkappa u - g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{19}$$

où $l \equiv l(x)$ est un champ de directions donné tel qu'en général $\partial u/\partial l \neq \partial u/\partial N$.

On peut donner des conditions autres que les conditions aux limites classiques de première, seconde et troisième espèces sur la frontière Γ. Nous allons maintenant déduire une condition aux limites qui décrit l'échange thermique du corps avec le milieu ambiant d'après la loi de Newton, en présence d'une pellicule fine bonne conductrice sur la surface du corps. Pour simplifier on supposera que le corps est isotrope et que sa surface est plane. Supposons que la pellicule couvre la partie gauche de la surface du corps conducteur, que sa surface gauche a pour équation $x_1 = -\delta$ et que la surface droite de la pellicule et la surface gauche du corps ont pour équation $x_1 = 0$. Isolons au voisinage de la frontière un prisme de section rectangulaire $-\delta < x_1 < \Delta_1$, $0 < x_2 < \Delta_2$. On supposera que le contact est parfait entre la pellicule et le corps. En vertu de (3), (9) et (17) on aura

$$\begin{gathered} \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = -f(x), \quad -\delta < x_1 < 0, \quad 0 < x_2 < \Delta_2, \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x), \ 0 < x_1 < \Delta_1, \ 0 < x_2 < \Delta_2 \end{gathered} \tag{20}$$

$$[u] = 0 \text{ pour } x_1 = 0, \ k \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=+0} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=-0} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \varkappa u - g(x) \text{ pour } x_1 = -\delta_2, \tag{22}$$

où $1/\varepsilon$ est le coefficient de conductibilité thermique de la pellicule.

Intégrons chaque équation (20) sur son domaine de définition, additionnons les expressions obtenues et utilisons les conditions

de conjugaison (21) et les conditions aux limites (22). On obtient

$$\int_0^{\Delta_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1, x_2)-\varkappa(x_2)\,u(-\delta, x_2)+g(x_2)\right]dx_2+$$
$$+\int_0^{\Delta_2}\left[\int_\delta^0\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)\,dx_1+\int_0^{\Delta_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right)dx_1+\right.$$
$$\left.+\int_{-\delta}^{\Delta_1}f(x_1, x_2)\,x_1\right]dx_2=0.$$

Divisons cette expression par Δ_2 et faisons tendre Δ_1 et Δ_2 vers zéro :

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, 0)-\varkappa(0)\,u(-\delta, 0)+g(0)+$$
$$+\int_{-\delta}^{0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, 0)+f(x_1, 0)\right]dx_1=0.$$

Faisons tendre maintenant ε et δ vers zéro de telle sorte que $\delta/\varepsilon = \sigma = \text{const}$. En définitive on obtient la nouvelle condition aux limites

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\varkappa u-g, \quad x_1=0. \tag{23}$$

Voyons quelle condition il importe de poser au sommet d'un angle du corps dont les côtés sont recouverts de couches minces pas

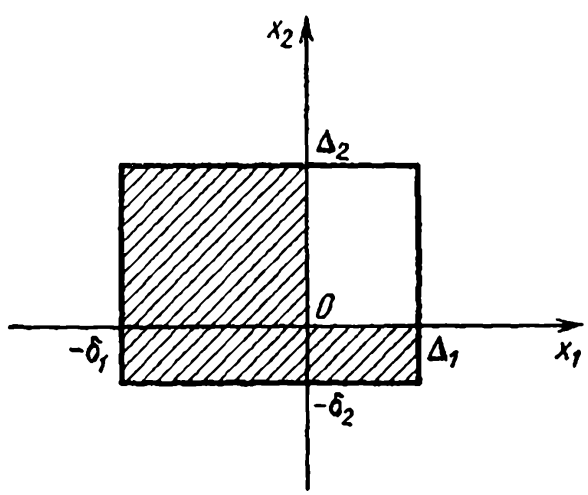


Fig. 17

nécessairement de même épaisseur. Supposons l'angle droit, son sommet à l'origine des coordonnées, ses côtés parallèles aux axes, et le corps situé dans le premier quadrant. Isolons au voisinage du sommet un rectangle $-\delta_1 < x_1 < \Delta_1$, $-\delta_2 < x_2 < \Delta_2$ (fig. 17).

Ecrivons l'équation, les conditions de conjugaison et les conditions aux limites:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f \text{ pour } 0<x_1<\Delta_1,$$
$$0<x_2<\Delta_2,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=-f,\quad -\delta_1<x_1<0,\quad -\delta_2<x_2<\Delta_2,$$
$$0\leqslant x_1<\Delta_1,\quad -\delta_2<x_2<0, \tag{24}$$

$$[u]=0,\ k\frac{\partial u}{\partial x_1}(+0,\ x_2)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}(-0,\ x_2)=0,\quad 0<x_2<\Delta_2, \tag{25}$$

$$[u]=0,\ k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x,\ +0)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ -0)=0,\quad 0<x_1<\Delta_1,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_1}=\varkappa_1 u-g,\quad x_1=-\delta_1,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\varkappa_2(u)-g_2 \text{ pour } x_2=-\delta_2. \tag{26}$$

Intégrons chaque équation de (24) sur son domaine de définition et utilisons les conditions de conjugaison (25) et les conditions aux limites (26):

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\delta_2}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1,\ x_2)\,dx_2+\int_0^{\Delta_2}k\frac{\partial u}{\partial x_1}(\Delta_1,\ x_2)\,dx_2+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\delta_1}^{0}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ \Delta_2)+\int_0^{\Delta_1}k\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\ \Delta_2)\,dx_1-\int_{-\delta_2}^{\Delta_2}(\varkappa_1 u-g_1)\,dx_2-$$
$$\int_{-\delta_1}^{\Delta_1}(\varkappa_2 u-g_2)\,dx_1+\int_{-\delta_1}^{\Delta_1}dx_1\int_{-\delta_2}^{\Delta_2}f(x_1,\ x_2)\,dx_2=0.$$

Faisons tendre maintenant Δ_1 et Δ_2 vers zéro, de même que ε, δ_1 et δ_2 mais sous réserve que $\delta_1/\varepsilon=\sigma_1=\text{const}$, $\delta_2/\varepsilon=\sigma=\text{const}$. On obtient en définitive

$$\sigma_1\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_2\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\ x_1=0,\ x_2=0. \tag{27}$$

§ 2. Approximations discrètes des équations du second ordre

Dans ce paragraphe on se propose de construire les approximations discrètes des équations différentielles du second ordre citées au § 1.

1. Approximations discrètes des équations à coefficients variables sans dérivées mixtes. Au chapitre précédent on a construit plusieurs schémas pour l'équation de Poisson. Ici nous allons étudier une équation elliptique du second ordre plus générale par exemple, l'équation (4) du § 1:

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x). \tag{1}$$

Soit Ω un réseau rectangulaire uniforme du plan Ox_1x_2. Au chapitre II on a indiqué un procédé d'approximation des opérateurs différentiels ordinaires du second ordre à coefficients variables. L'opérateur L étant la somme de deux opérateurs du même type, on peut écrire immédiatement l'approximation de l'équation (1). Plus exactement

$$\Lambda y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -\varphi(x), \tag{2}$$

où les coefficients $a_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$ et $\varphi(x)$ peuvent être choisis par exemple de la sorte

$$\begin{gathered} a_1(x) = k_1\left(x_1 - \frac{h_1}{2},\ x_2\right),\ a_2(x) = k_2\left(x_1,\ x_2 - \frac{h_2}{2}\right), \\ \varphi(x) = f(x),\ x = (x_1, x_2),\ x_1 = i_1 h_1,\ x_2 = i_2 h_2. \end{gathered} \tag{3}$$

Avec un tel choix des coefficients l'équation discrète (2) approchera l'équation (1) avec une erreur $O(|h|^2)$, où $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$. On ne change pas l'ordre de l'erreur d'approximation en choisissant les coefficients $a_\alpha(x)$ de la sorte

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \frac{k_1(x_1, x_2) + k_1(x_1 - h_1, x_2)}{2}, \\ a_2(x) &= \frac{k_2(x_1, x_2) + k_2(x_1, x_2 - h_2)}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Il existe d'autres procédés pour choisir a_α et φ. On remarquera qu'on se sert d'un stencil de cinq points en « croix » pour écrire l'équation discrète (2).

Supposons maintenant que Ω est un réseau rectangulaire quelconque irrégulier

$$\begin{gathered} h_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}, \quad \hbar_\alpha = \frac{h_\alpha + h_\alpha^+}{2}, \\ h_\alpha^+ = h_\alpha^{(i_\alpha + 1)} = x_\alpha^{(i_\alpha + 1)} - x_\alpha^{(i_\alpha)}, \quad \alpha = 1,\ 2. \end{gathered}$$

L'équation (1) peut y être approchée comme suit:

$$\Lambda y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{\hat{x}_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{\hat{x}_2} = -\varphi(x), \tag{5}$$

où a_α, $\alpha = 1, 2$ et $\varphi(x)$ se calculent à l'aide des formules (3) ou (4). On rappelle que

$$v_{\hat{x}_\alpha} = \frac{v^{(+1_\alpha)} - v}{h_\alpha}.$$

L'équation (5) peut être composée, par exemple, par la méthode du bilan suivie d'une approximation des coefficients comme au § 2 du chapitre II pour une équation différentielle ordinaire.

Calculons l'erreur d'approximation de l'équation (5) avec les coefficients (3) : $\psi = \Lambda u + \varphi$. En vertu de (1) l'erreur d'approximation peut être mise sous la forme

$$\psi = \Lambda u + \varphi - Lu - f = \sum_{\alpha=1}^{2} \psi_\alpha + (\varphi - f),$$

où

$$\psi_\alpha = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right). \tag{6}$$

Calculons ψ_α. On a

$$w^{(+0,5_\alpha)} = w + \frac{h_\alpha^+}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{(h_\alpha^+)^2}{8}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O((h_\alpha^+)^3),$$

$$w^{(-0,5_\alpha)} = w - \frac{h_\alpha}{2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O(h_\alpha^3),$$

qui entraînent

$$\frac{1}{h_\alpha}\{w^{(+0,5_\alpha)} - w^{(-0,5_\alpha)}\} = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{8h_\alpha}[(h_\alpha^+)^2 - h_\alpha^2]\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + O(h_\alpha^2).$$

Comme $\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(+1_\alpha)} + O(h_\alpha^+)$, la dernière identité permet de mettre $\partial w/\partial x_\alpha$ sous la forme

$$\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = (w^{(-0,5_\alpha)})_{\hat{x}_\alpha} - \frac{1}{8}\left(h_\alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\right)_{\hat{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2).$$

En posant ici $w = k_\alpha \partial u/\partial x_\alpha$ on aura

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = \left\{\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} - \frac{1}{8}h_\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right\}_{\hat{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2).$$

Donc

$$\psi_\alpha = (\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2), \tag{7}$$

où

$$\eta_\alpha = a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} - \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0,5_\alpha)} + \frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right).$$

Evaluons η_α. Comme

$$u=\left(u+0{,}5h_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(-0{,}5_\alpha)}+O(h_\alpha^3),$$

$$u^{(-1_\alpha)}=\left(u-0{,}5h_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{h_\alpha^2}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}\right)^{(-0{,}5_\alpha)}+O(h_\alpha^3),$$

alors

$$u_{\bar{x}_\alpha}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0{,}5_\alpha)}+O(h_\alpha^2)$$

et

$$\eta_\alpha=(a_\alpha-k_\alpha^{(-0{,}5_\alpha)})\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{(-0{,}5_\alpha)}+O(h_\alpha^2). \tag{8}$$

Si maintenant l'on tient compte de (3), l'on aura pour η_α

$$\eta_\alpha=O(h_\alpha^2).$$

Si donc la solution $u(x_1, x_2)$ de l'équation (1) possède des dérivées continues par rapport à x_1 et x_2 jusqu'au quatrième ordre inclus, l'erreur d'approximation ψ de l'équation (5) avec les coefficients et le second membre (3) peut être mise sous la forme

$$\psi=\sum_{\alpha=1}^{2}(\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}+\psi^*,\quad \psi^*=O(\hbar_1^2+\hbar_2^2),\quad \eta_\alpha=O(h_\alpha^2). \tag{9}$$

2. Schémas discrets pour équations à dérivées mixtes et à coefficients variables. Examinons maintenant l'équation

$$Lu\equiv\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=-f(x). \tag{10}$$

Cette équation est un cas particulier de l'équation (6) du § 1. Elle sera elliptique si ses coefficients vérifient la condition (7) du § 1.

La construction de l'approximation discrète de l'équation (10) sur un réseau régulier ne présente aucune difficulté. On vérifie immédiatement que l'équation

$$\Lambda y\equiv\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}[(k_{\alpha\beta}(x)\,y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}+(k_{\alpha\beta}(x)\,y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}]=-f(x) \tag{11}$$

approche l'équation (10) avec une erreur $O(|h|^2)$. Indiquons une autre approximation de l'équation (10) avec la même erreur:

$$\begin{aligned}\Lambda y\equiv\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha}+(k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\bar{x}_\alpha}]+\\+\frac{1}{4}\sum_{\alpha\neq\beta}[k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}+(k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}+\\+(k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}+(k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{x_\alpha}]=-f(x).\end{aligned} \tag{12}$$

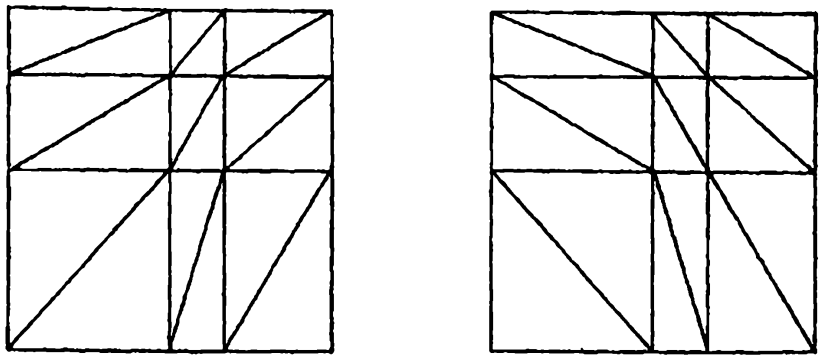
Si les coefficients $k_{\alpha\beta}$ sont constants, l'équation (12) s'écrit

$$\sum_{\alpha=1}^{2} k_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (k_{12} + k_{21}) y_{\overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_2} = -f(x), \tag{13}$$

où

$$v_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = (v^{(+1_\alpha)}) - v^{(-1_\alpha)}/(2h_\alpha).$$

Construisons maintenant l'approximation discrète de l'équation (10) sur un réseau irrégulier. Utilisons à ces fins la méthode de Boubnov-Galerkine (cf. § 3 chap. II).



a *b*

Fig. 18

On rappelle (cf. chap. I) que par solution généralisée de l'équation (10) on entend une fonction $u(x) \in W_2^1(G)$ qui, quelle que soit la fonction

$$v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G),$$

vérifie l'identité intégrale

$$\iint_G \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} dx_1\, dx_2 = \iint_G f(x) v(x)\, dx_1\, dx_2. \tag{14}$$

On appelle solution approchée de l'équation (10) une fonction $\bar{u}(x) \in V$ qui, quelle que soit $v(x) \in \overset{\circ}{V}$, vérifie l'identité intégrale (14). V est un sous-espace de dimension finie de $W_2^1(G)$, $\overset{\circ}{V} = V \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

On se donne un espace V. Soit Ω un réseau rectangulaire irrégulier du plan Ox_1x_2, formé des points d'intersection des deux familles de droites

$$x_1 = x_1^{(i_1)}, \quad x_2 = x_2^{(i_2)}, \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \alpha = 1, 2, \ldots$$

ces droites partagent le plan Ox_1x_2 en mailles rectangulaires $G[i] = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)}\}$. Les diagonales passant par les sommets $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$, $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2+1)})$ partagent chaque maille en deux triangles (fig. 18, *a*). Désignons le triangle supérieur gauche par $\Delta^+[i]$, et le triangle inférieur droit par $\Delta^-[i]$. Soit $\bar{G}_h$ l'union des triangles $\Delta^\pm[i]$ dont l'intersection avec le domaine G n'est pas vide, i.e. $\bar{G}_h = \{x \mid x \in \Delta^\pm[i], \Delta^\pm[i] \cap G \neq \varnothing\}$. Pour sous-espace $V \in W_2^1(G)$ on peut alors prendre l'espace des fonctions continues sur $\bar{G}_h$ et linéaires sur chaque triangle $\Delta^\pm[i] \in \bar{G}_h$.

Désignons par $\bar{\omega} = \bar{G}_h \cap \Omega$ l'ensemble des nœuds du réseau, contenus dans $\bar{G}_h$ et par $\mathfrak{M} = \{i = (i_1, i_2) \mid x_i \in \bar{\omega}\}$ l'ensemble des indices des nœuds du réseau $\bar{\omega}$. La solution approchée de l'équation (10) pourra être cherchée sous la forme

$$\bar{u}(x) = \sum_{j \in \mathfrak{M}} y_j \eta_j(x) \qquad j = (j_1, j_2), \tag{15}$$

où $\{\eta_j\}$ est une base de l'espace V.

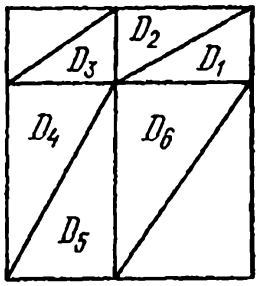


Fig. 19

Faisons choix d'une base dans V. Soit $D[i]$ l'hexagone formé de l'union des six triangles $\Delta^\pm[i]$, le sommet commun étant confondu avec le nœud x_i (fig. 19). Pour base dans V prenons l'ensemble des fonctions continues, linéaires par morceaux, dont chacune d'elles est non nulle en un seul nœud du réseau $\bar{\omega}$. On supposera que cette valeur non nulle est égale à l'unité. Donc toute fonction base $\eta_i(x)$ sera non nulle uniquement sur $D[i]$ et sera définie par l'expression suivante:

$$\eta_{i_1 i_2}(x) = \begin{cases} (x_1^{(i_1+1)} - x_1)/h_1^+, & x \in D_1[i], \\ (x_2^{(i_2+1)} - x_2)/h_2^+, & x \in D_2[i], \\ (x_1 - x_1^{(i_1)})/h_1 + (x_2^{(i_2+1)} - x_2)/h_2^+, & x \in D_3[i], \\ (x_1 - x_1^{(i_1-1)})/h_1, & x \in D_4[i], \\ (x_2 - x_2^{(i_2-1)})/h_2, & x \in D_5[i], \\ (x_1^{(i_1+1)} - x_1)/h_1^+ + (x_2 - x_2^{(i_2)})/h_2, & x \in D_6[i], \\ 0 & x \notin D_\mu[i], \\ & \mu = 1, \ldots, 6. \end{cases} \tag{16}$$

L'allure des fonctions (16) est représentée sur la figure 20. Si l'on se donne une base, les coefficients y_j de (15) représentent les valeurs de la solution approchée aux nœuds du réseau.

Trouvons les équations auxquelles doivent satisfaire les paramètres inconnus y_j de (15). Portons dans (14)

$$u(x) \equiv \bar{u}(x) \quad \text{et} \quad v(x) \equiv \eta_i(x).$$

On obtient en définitive le système d'équations suivant:

$$\sum_{j\in\mathfrak{M}} A_i^j y_j = \Phi_i, \quad i\in\mathfrak{M}, \tag{17}$$

où

$$A_i^j = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \iint\limits_{G\cap D[i]} k_{\alpha\beta} \frac{\partial\eta_i}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_\alpha}\, dx_1\, dx_2, \tag{18}$$

$$\Phi_i = \iint\limits_{G\cap D[i]} f\eta_i\, dx_1\, dx_2, \quad i=(i_1, i_2), \quad j=(j_1, j_2). \tag{19}$$

Calculons les coefficients A_i^j pour les valeurs i telles que $D[i]\subset G$

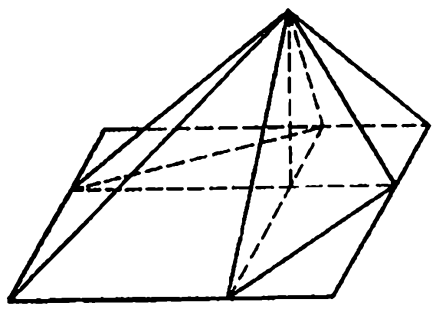


Fig. 20.

en supposant que d'abord les coefficients $k_{\alpha\beta}$ sont constants et en utilisant ensuite l'allure des fonctions $\eta_i(x)$.

De (16) il vient

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial x_1} = \begin{cases} -1/h_1^+, & x\in D_1,\\ 0, & x\in D_2,\\ 1/h_1, & x\in D_3,\\ 1/h_1, & x\in D_4,\\ 0, & x\in D_5,\\ -1/h_1^+, & x\in D_6,\\ 0, & x\bar{\in} D_\mu,\\ \mu=1,\ldots,6. \end{cases} \quad \frac{\partial\eta_i}{\partial x_2} = \begin{cases} 0, & x\in D_1,\\ -1/h_2^+, & x\in D_2,\\ -1/h_2^+, & x\in D_3,\\ 0, & x\in D_4,\\ 1/h_2, & x\in D_5,\\ 1/h_2, & x\in D_6,\\ 0, & x\bar{\in} D_\mu,\\ \mu=1,\ldots,6. \end{cases} \tag{20}$$

(18) et (20) entraînent que seuls les coefficients

$$A_{i_1i_2}^{i_1i_2},\ A_{i_1i_2}^{i_1+1,\,i_2},\ A_{i_1i_2}^{i_1-1,\,i_2},\ A_{i_1i_2}^{i_1,\,i_2-1},\ A_{i_1i_2}^{i_1,\,i_2+1},\ A_{i_1i_2}^{i_1+1,\,i_2+1},\ A_{i_1i_2}^{i_1-1,\,i_2-1}$$

peuvent être non nuls. Le calcul montre que

$$A_{i_1i_2}^{i_1i_2}=\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1^+}+\frac{h_2}{h_1}+\frac{h_2^+}{h_1}+\frac{h_{21}}{h_1^+}\right)+\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2^+}+\frac{h_1}{h_2}+\frac{h_1}{h_2^+}+\frac{h_1^+}{h_2}\right)-$$
$$-(k_{12}+k_{21}),$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1+1,\,i_2}=-\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1^+}+\frac{h_2}{h_1^+}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1-1,\,i_2}=-\frac{k_{11}}{2}\left(\frac{h_2^+}{h_1}+\frac{h_2}{h_1}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1,\,i_2+1}=-\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2^+}+\frac{h_1}{h_2^+}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2}, \tag{21}$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1,\,i_2-1}=-\frac{k_{22}}{2}\left(\frac{h_1^+}{h_2}+\frac{h_1}{h_2}\right)+\frac{k_{12}+k_{21}}{2},$$
$$A_{i_1i_2}^{i_1+1,\,i_2+1}=A_{i_1i_2}^{i_1-1,\,i_2-1}=-\frac{k_{12}+k_{21}}{2}.$$

En portant (21) dans (17) et en transformant on obtient

$$\Lambda^+y\equiv k_{11}y_{x_1\hat{x}_1}+k_{22}y_{x_2\check{x}_2}+\frac{k_{12}+k_{21}}{2}(y_{\hat{x}_1\hat{x}_2}+y_{\check{x}_1\check{x}_2})=\frac{-1}{h_1h_2}\Phi.$$

Supposons maintenant que $k_{\alpha\beta}$ sont variables. Dans ce cas on écrira l'approximation discrète de l'équation (10) comme celle que nous venons juste de construire

$$\Lambda^+y\equiv\frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}]+\right.$$
$$\left.+\sum_{\substack{\alpha,\,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}[(k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}]\right\}=-f(x). \tag{22}$$

Calculons l'erreur d'approximation de l'équation (22) : $\psi^+=\Lambda^+u+f$. Transformons d'abord ψ^+ en remplaçant, en vertu de (10), f par $-Lu$ et en l'écrivant sous forme de la somme

$$\psi^+=\Lambda^+u-Lu=\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2}\psi_{\alpha\beta}^+,$$

où

$$\psi_{\alpha\alpha}^+=\frac{1}{2}[(k_{\alpha\alpha}u_{x_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\alpha}u_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}]-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$

et

$$\psi_{\alpha\beta}^+=\frac{1}{2}[(k_{\alpha\beta}u_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\beta}u_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}]-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right),\qquad \alpha\neq\beta.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2}[(k_{\alpha\alpha}u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\alpha}u_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}]=\frac{1}{2}((k_{\alpha\alpha}+k_{\alpha\alpha}^{(-1\alpha)})\,u_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha},$$

et compte tenu de (6), (7), il vient

$$\psi_{\alpha\alpha}^{+}=(\eta_{\alpha\alpha}^{+})_{\hat{x}_\alpha}+O(h_\alpha^2),$$

et comme

$$k_{\alpha\alpha}+k_{\alpha\alpha}^{(-1\alpha)}-2k_{\alpha\alpha}^{(-0,5\alpha)}=O(h_\alpha^2),$$

on déduit en vertu de (8)

$$\eta_{\alpha\alpha}^{+}=O(h_\alpha^2).$$

Par ailleurs

$$(k_{\alpha\beta}u_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\beta}u_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}=\frac{h_1^+h_2^+}{h_1h_2}(k_{\alpha\beta}u_{x_\beta})_{x_\alpha}+\frac{h_1h_2}{\hbar_1\hbar_2}(k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}=$$

$$=\frac{h_1^+h_2^++h_1h_2}{h_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+\frac{(h_\alpha^+)^2h_\beta^+-h_\alpha^2h_\beta}{2h_1\hbar_2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+$$

$$+\frac{h_\alpha^+(h_\beta^+)^2-h_\alpha h_\beta^2}{2\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right)+O(\hbar_1^2+\hbar_2^2),$$

donc

$$\psi_{\alpha\beta}^{+}=\frac{(h_1^+-h_1)(h_2^+-h_2)}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+$$

$$+\frac{(h_\alpha^+)^2h_\beta^+-h_\alpha^2h_\beta}{4h_1\hbar_2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+$$

$$+\frac{h_\alpha^+(h_\beta^+)^2-h_\alpha h_\beta^2}{4\hbar_1\hbar_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right)+O(\hbar_1^2+\hbar_2^2),\quad \alpha\neq\beta.$$

En portant $\psi_{\alpha\beta}^{+}$ dans l'expression de ψ^+ on constate que $\psi^+=O(1)$, i.e. il n'y a pas d'approximation au point.

Construisons une autre approximation de l'équation (10). On utilisera la même méthode mais une autre partition du plan en triangles (fig. 18, *b*). Des raisonnements analogues nous conduisent à l'équation

$$\Lambda^- y=\frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}]+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{\alpha,\,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}[(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha}+(k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}]\right\}=-f,$$

dont l'erreur d'approximation $\psi^- = \Lambda^- u + f$ est de la forme

$$\psi^- = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \psi^-_{\alpha\beta},$$

où $\psi^-_{\alpha\alpha} = \psi^+_{\alpha\alpha}$ et

$$\psi^-_{\alpha\beta} = -\frac{(h_1^+ - h_1)(h_2^+ - h_2)}{4h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) +$$
$$+\frac{(h_\alpha^+)^2 h_\beta - h_\alpha^2 h_\beta^+}{4h_1h_2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + \frac{h_\alpha (h_\beta^+)^2 - h_\alpha^+ h_\beta^2}{4h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\times$$
$$\times\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2}\right) + O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2), \qquad \alpha \neq \beta,$$

donc $\psi^- = O(1)$.

Écrivons une nouvelle approximation de l'équation (10) à l'aide de l'opérateur $\Lambda = 1/2\,(\Lambda^+ + \Lambda^-)$

$$\Lambda y \equiv \frac{1}{2}(\Lambda^+ + \Lambda^-)\,y = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[(k_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\alpha}\right] +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{2}\left[(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{\hat{x}_\alpha} +\right.$$
$$\left. + (k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{\check{x}_\alpha}\right] = -f(x). \tag{23}$$

Calculons d'erreur d'approximation de l'équation (23). En utilisant les représentations de $\psi^{\pm}_{\alpha\beta}$ on trouve

$$\psi = \Lambda u + f = \sum_{\alpha=1}^{2}(\eta_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi^*, \quad \eta_\alpha = O(h_\alpha^2), \qquad \psi^* = O(\hbar_1^2 + \hbar_2^2). \tag{24}$$

R e m a r q u e. Sur un réseau régulier l'équation (23) se confond avec l'équation (12).

3. Schéma d'ordre supérieur d'approximation pour équation à dérivées mixtes et coefficients constants. Construisons un schéma discret approchant l'équation (10) prise avec des coefficients constants avec une erreur $O(|h|^4)$. On écrira l'équation discrète sur un stencil de neuf points en « tiroir ». Ce stencil a été utilisé au chapitre II pour la construction de schémas d'ordre supérieur d'approximation pour l'équation de Poisson. Il s'avère cependant que l'équation (10) peut être approchée sur ce stencil avec une erreur $O(|h|^4)$ à la seule condition que les pas h_1 et h_2 du réseau soient liés avec les coefficients k_{11} et k_{22}. On supposera que $k_{11} = k_{22} = 1$, $k_{12} = k_{21} = \varkappa$. Le réseau Ω doit alors être carré.

Etudions tout d'abord l'opérateur discret

$$\Lambda v = v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa\sigma (v_{\bar{x}_1 x_2} + v_{x_1 x_2}) + \varkappa (1-\sigma) (v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + v_{x_1 x_2}),$$

où σ est un paramètre quelconque. Développons la fonction Λv suivant les puissances de h

$$\Lambda v = Lv + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x_2^4}\right) + \frac{\varkappa h^2}{3}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^3\,\partial x_2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x_1\,\partial x_2^3}\right) +$$
$$+ \frac{\varkappa(1-2\sigma)}{2} h^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2} + O(h^4) =$$
$$= Lv + \frac{h^2}{12} L^2 v - \frac{h^2}{6}\left[1 - 3(1-2\sigma)\varkappa + 2\varkappa^2\right] \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2} + O(h^4).$$

D'où il s'ensuit que l'équation discrète

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa\left[\sigma(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + (1-\sigma)(y_{x_1 \bar{x}_2} + y_{\bar{x}_1 x_2})\right] +$$
$$+ \frac{h^2}{6}(1 - 3(1-2\sigma)\varkappa + 2\varkappa^2)\, y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi', \tag{25}$$

où

$$\varphi' = f + \frac{h^2}{12} Lf, \tag{26}$$

approche l'équation (10) avec une erreur $O(|h|^4)$ quelle que soit la valeur du paramètre σ.

Montrons en effet que l'équation (25) ne dépend pas du paramètre σ. Il est immédiat de vérifier que

$$y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = y_{x_1 \bar{x}_2} - h y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2}, \quad y_{x_1 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_2} + h y_{\bar{x}_1 x_1 x_2},$$

donc

$$y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} = y_{x_1 \bar{x}_2} + y_{\bar{x}_1 x_2} + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}.$$

En portant cette expression dans celle de $\Lambda' y$ on obtient

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa\left[\sigma(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + y_{x_1 \bar{x}_2} + y_{\bar{x}_1 x_2} +\right.$$
$$\left. + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} - \sigma(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2} + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2})\right] +$$
$$+ h^2\left(\frac{1}{6} - \frac{\varkappa}{2} + \varkappa\sigma + \frac{\varkappa^2}{3}\right) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} +$$
$$+ \varkappa(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \frac{h^2}{6}(1 + 3\varkappa + 2\varkappa^2)\, y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}.$$

L'équation (25) s'écrit alors

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \varkappa(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) +$$
$$+ \frac{h^2}{6}(1 + 3\varkappa + 2\varkappa^2)\, y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi'. \tag{27}$$

4. Schémas discrets pour équations à termes mineurs. Considérons l'équation

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] = -f(x) \tag{28}$$

et construisons pour elle un schéma discret sur un réseau régulier Ω.

Voici un schéma simple du second ordre d'approximation de l'équation (28):

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} [(a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + r_\alpha(x) y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}] = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{29}$$

où $a_\alpha(x)$ se calcule par exemple à l'aide des formules (3). Mettons l'équation (29) sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)} + a_\alpha}{h_\alpha^2} y =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \left(\frac{a_\alpha^{(+1_\alpha)}}{h_\alpha^2} + \frac{r_\alpha}{2h_\alpha} \right) y^{(+1_\alpha)} + \left(\frac{a_\alpha}{h_\alpha^2} - \frac{r_\alpha}{2h_\alpha} \right) y^{(-1_\alpha)} \right\} + f(x).$$

Il est clair que lorsque les coefficients $r_\alpha(x)$ sont prépondérants devant les coefficients $k_\alpha(x)$, le principe du maximum (cf. chapitre III) n'est valable pour le schéma (29) que si les h_α sont assez petits. Pour s'affranchir de cette contrainte, construisons un autre schéma pour l'équation (28).

Mettons l'équation (28) sous la forme

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{r_\alpha(x)}{k_\alpha(x)} \cdot k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] = -f(x)$$

et approchons les flux

$$-k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$$

de façon analogue en termes supérieurs et inférieurs; on obtient

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \frac{r_\alpha}{2k_\alpha} (a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}) \right] = -f(x). \tag{30}$$

L'erreur d'approximation de l'opérateur est visiblement $O(|h|^2)$. Transformons les termes inférieurs comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{r_\alpha}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} &= \frac{r_\alpha + |r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha} - \frac{|r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}, \\ \frac{r_\alpha}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} &= \frac{r_\alpha - |r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{|r_\alpha|}{2k_\alpha} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}, \end{aligned} \tag{31}$$

et posons $\frac{r_\alpha+|r_\alpha|}{2}=r_\alpha^+\geqslant 0$, $\frac{r_\alpha-|r_\alpha|}{2}=r_\alpha^-\leqslant 0$, $r_\alpha^+=0$ pour $r_\alpha\leqslant 0$, $r_\alpha^-=0$ pour $r_\alpha\geqslant 0$. En portant (31) dans (30) on aura

$$\Lambda y=\sum_{\alpha=1}^{2}\left(1-\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}\right)(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}.$$

Or

$$1-\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}=\frac{1}{1+\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}}+O(h_\alpha^2).$$

Donc on peut prendre le schéma discret

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{1}{1+\frac{h_\alpha|r_\alpha|}{2k_\alpha}}(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}a_\alpha^{(+1_\alpha)}y_{x_\alpha}+\frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}=-f(x). \quad (32)$$

L'erreur d'approximation de ce schéma est $O(|h|^2)$ et on vérifie immédiatement que le principe du maximum est valable quel que soit h_α.

§ 3. Approximation des conditions de conjugaison et des conditions aux limites pour équations du second ordre

Dans ce paragraphe on construira des approximations discrètes des conditions de conjugaison et des conditions aux limites citées au § 1. On sera plus attentif à la construction des approximations des conditions aux limites de seconde et troisième espèce.

1. Approximation des conditions de conjugaison. Supposons que le coefficient de conductibilité thermique $k_1(x)$ de l'équation (4) du § 1:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x_1,x_2) \quad (1)$$

possède une discontinuité de première espèce sur la droite $x_1=0$ et soit à chercher la solution de cette équation qui vérifie les conditions de conjugaison (9) du § 1

$$u(+0,x_2)-u(-0,x_2)=0,$$

$$k_1(+0,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}-k_1(-0,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=0. \quad (2)$$

On supposera pour simplifier que le coefficient $k_2(x)$ et le second membre $f(x)$ de l'équation (1) sont continus pour $x_1=0$. Construisons l'approximation des conditions de conjugaison (2). Supposons que le réseau est tel que la ligne de discontinuité passe par ses nœuds. En vertu de la première des conditions (2), la solution cherchée est

continue pour $x_1 = 0$, donc elle sera approchée par les valeurs de la fonction discrète pour $x_1 = 0$.

Ecrivons l'approximation la plus simple de la seconde des conditions (2)

$$a_1(h_1, x_2)\, y_{x_1} - a_1(0, x_2)\, y_{\bar{x}_1} = 0,$$

où le coefficient $a_1(x)$ est défini, par exemple, par l'expression (3) du § 2, i.e.

$$a_1(x) = k_1\left(x_1 - \frac{h_1}{2},\ x_2\right),$$

et calculons son erreur

$$\psi = a_1(h_1, x_2)\, u_{x_1} - a_1(0, x_2)\, u_{\bar{x}_1} =$$
$$= k_1(+0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}(+0, x_2) - k_1(-0, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}(-0, x_2) +$$
$$+ \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=+0} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=-0} + O(h_1^2). \qquad (3)$$

A l'aide de l'équation (1) exprimons $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ et $f(x)$ et portons l'expression obtenue dans (3):

$$\psi = -h_1\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - h_1 f(x) + O(h_1^2) =$$
$$= -h_1(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} - h_1 f(x) + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Il s'ensuit que l'erreur d'approximation est $O(h_1)$, mais si la seconde condition de conjugaison (2) est approchée par les expressions

$$a_1(h_1, x_2)\, y_{x_1} - a_1(0, x_2)\, y_{\bar{x}_1} + h_1(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + h_1 f(x) = 0, \qquad (4)$$

l'erreur de la nouvelle équation sera de $O(h_1^2 + h_2^2)$. Si l'on divise l'équation (4) par h_1 et qu'on la transforme, elle s'écrit

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(x),$$

i.e. elle sera confondue avec les équations discrètes (2) du § 2 pour les nœuds où il n'y a pas de discontinuité.

Soit maintenant à chercher la solution de l'équation (1) prise avec un coefficient $k_1(x)$ discontinu sur la droite $x_1 = 0$, qui vérifie les conditions de conjugaison (12) du § 1, (13) du § 1, i.e.

$$\varkappa[u]\,|_{x_1=0} = k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}, \quad \varkappa[u]\,|_{x_1=0} = k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}. \qquad (5)$$

Choisissons le réseau comme dans le cas précédent. Cette fois la solution de l'équation (1) avec $x_1 = 0$ possède une discontinuité de première espèce, donc la fonction discrète $y(x)$ qui approche la solution de l'équation (1) pour $x_1 = 0$ doit prendre deux valeurs. Désignons-les par $y^+(0, x_2)$ et $y^-(0, x_2)$. Ecrivons les plus simples

approximations des conditions (5)

$$\varkappa(y^+ - y^-) = a_1(0, x_2)\, y_{\bar{x}_1}, \quad \varkappa(y^+ - y^-) = a_1(h_1, x_2)\, y_{x_1},$$

où

$$y_{\bar{x}_1} = \frac{1}{h_1}[y^-(0, x_2) - y(-h_1, x_2)],$$

$$y_{x_1} = \frac{1}{h_1}[y(h_1, x_2) - y^+(0, x_2)],$$

et calculons les erreurs d'approximation de ces équations. L'erreur d'approximation de la première équation est égale à

$$\psi_1 = \varkappa[u] - a_1(0, x_2)\, u_{\bar{x}_1} =$$

$$= \varkappa[u] - k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=-0} + O(h_1^2) =$$

$$= -\frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + f\right)_{x_1=-0} + O(h_1^2) =$$

$$= -\frac{h_1}{2}[(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f]_{x_1=-0} + O(h_1^2 + h_2^2).$$

On calcule de façon analogue l'erreur d'approximation de la deuxième équation

$$\psi_2 = \varkappa[u] - a_1(h_1, x_2)\, u_{x_1} = \frac{h_1}{2}[(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} + f]_{x_1=+0} + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Ces développements entraînent que les erreurs d'approximation des deux fonctions sont $O(h_1)$, mais pour les équations

$$\varkappa(y^+ - y^-) - a_1 y_{\bar{x}_1} + \frac{h_1}{2}(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} + \frac{h_1}{2} f = 0,$$

$$\varkappa(y^+ - y^-) - a_1^{(+1)} y_{x_1} - \frac{h_1}{2}(a_2 y_{\bar{x}_2}^{\pm})_{x_2} - \frac{h_1}{2} f = 0$$

elles seront de $O(h_1^2 + h_2^2)$. Divisons chacune de ces équations par $h_1/2$:

$$\begin{aligned} &\frac{\varkappa(y^+ - y^-) - a_1 y_{\bar{x}_1}}{0{,}5 h_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f, \\ &\frac{a_1^{(+1)} y_{x_1} - \varkappa(y^+ - y^-)}{0{,}5 h_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2}^{\pm})_{x_2} = -f. \end{aligned} \tag{6}$$

Sous cette forme les équations (6) rappellent les équations (2) du § 2 dans les autres nœuds du réseau.

Si les conditions de conjugaison (14) du § 1 sont données pour l'équation (1), $x_1 = 0$, on construit leur approximation discrète

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(0, x_2) - \frac{\alpha(x_2)}{h_1} \tag{7}$$

comme dans le cas des conditions de conjugaison (2).

2. Approximation des conditions aux limites pour équations sans dérivées mixtes. Passons à l'approximation des conditions aux limites. Commençons par les conditions aux limites de l'équation (1). Construisons tout d'abord les approximations discrètes pour les conditions aux limites de deuxième (16) § 1 et troisième (17) § 1 espèce. On supposera pour l'instant que la solution de l'équation (1) est cherchée dans le rectangle $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ sur la frontière Γ duquel elle vérifie les conditions aux limites de troisième espèce (17) § 1. Détaillons le problème:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -f(x),$$

$$k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \varkappa_{-\alpha} u - g_{-\alpha}(x_\beta), \quad x_\alpha = 0, \tag{1}$$

$$-k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \varkappa_{+\alpha} u - g_{+\alpha}(x_\beta), \quad x_\alpha = l_\alpha, \ \alpha, \beta = 1, 2, \ \alpha \neq \beta. \tag{8}$$

On a noté au chapitre I que la résolution du problème (1), (8) revenait à trouver un élément minimisant la fonctionnelle

$$J(v) \equiv \int_G \left[k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 - 2f(x)\,v\right] dx +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{2} \int_0^{l_\beta} \{[\varkappa_{-\alpha} v^2 - 2g_{-\alpha} v]\,|_{x_\alpha=0} + [\varkappa_{+\alpha} v^2 - 2g_{+\alpha} v]\,|\,x_\alpha = l_\alpha\}\, dx_\beta. \tag{9}$$

Construisons le schéma discret pour le problème (1), (8) par la méthode des approximations de la fonctionnelle (9) (cf. § 3 chap. II). Introduisons dans le domaine fermé $\bar{G} = G \cup \Gamma$ le réseau rectangulaire régulier $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, où $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha\}$ est un réseau sur l'intervalle $[0, l_\alpha]$. Désignons par $\omega = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2) \mid x_\alpha \in \omega_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, où $\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} \mid i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1\}$ l'ensemble des nœuds intérieurs du réseau et par $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ l'ensemble des nœuds frontière. Supposons par ailleurs que $\omega_\alpha^+ = \{x_\alpha^{(i_\alpha)}|, \ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha\}$, ${}^+\omega_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)}|, \ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha - 1\}$.
On se servira également de la notation

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ h_\alpha/2, & x_\alpha = 0, \ l_\alpha. \end{cases}$$

Remplaçons par leurs sommes intégrales toutes les intégrales de (9). Ces sommes ne seront pas en général les mêmes pour toutes

les intégrales. Dans l'intégrale double

$$\int_G k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 dx = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} k_1(x_1, x_2)\left(\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\, dx_2$$

remplaçons l'intégrale sur x_1 par la formule des rectangles centraux et l'intégrale sur x_2 par la formule des trapèzes

$$\int_G k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 dx \sim$$

$$\sim \sum_{x_1\in\omega_1^+}\ \sum_{x_2\in\bar\omega_2} k_1\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right)\right)^2 h_1\hbar_2. \qquad (10)$$

Dans $\int_G k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dx$ remplaçons l'intégrale sur x_1 par la formule des trapèzes, et celle sur x_2 par la formule des rectangles centraux

$$\int_G k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 dx \sim$$

$$\sim \sum_{x_1\in\bar\omega_1}\ \sum_{x_2\in\omega_2^+} k_2\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right)\right)^2 \hbar_1 h_2. \qquad (11)$$

Dans l'intégrale double de (9) remplaçons l'intégrale sur x_1 et sur x_2 par la formule des trapèzes:

$$\int_G [-2f(x)v]\, dx \sim -2\sum_{x_1\in\bar\omega_1}\ \sum_{x_2\in\bar\omega_2} f(x_1, x_2)\, v(x_1, x_2)\, \hbar_1\hbar_2. \qquad (12)$$

Remplaçons toutes les intégrales étendues à la frontière par la formule des trapèzes:

$$\int_0^{l_\beta} [(\varkappa_{-\alpha}v^2 - 2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0} + (x_{+\alpha}v^2 - 2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\, dx_\beta \sim$$

$$\sim \sum_{\bar\omega_\beta} [(\varkappa_{-\alpha}v^2 - 2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0} + (\varkappa_{+\alpha}v^2 - 2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\, \hbar_\beta. \qquad (13)$$

Approchons dans les formules (10) et (11) les dérivées par les différences

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(x_1-\frac{h_1}{2},\ x_2\right) \sim v_{\bar x_1}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_2}\left(x_1,\ x_2-\frac{h_2}{2}\right) \sim v_{\bar x_2}. \qquad (14)$$

Portons maintenant les approximations (10) à (14) dans (9). On obtient alors l'approximation suivante de la fonctionnelle (9):

$$J_h(v) \equiv \sum_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} a_1 v_{\bar x_1}^2 h_1\hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1\times\omega_2^+} a_2 v_{\bar x_2}^2 \hbar_1 h_2 - 2\sum_{\bar\omega_1\times\bar\omega_2} fv\hbar_1\hbar_2 +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{2}\ \sum_{\bar\omega_\beta} [(\varkappa_{-\alpha}v^2 - 2g_{-\alpha}v)|_{x_\alpha=0} + (\varkappa_{+\alpha}v^2 - 2g_{+\alpha}v)|_{x_\alpha=l_\alpha}]\, \hbar_\beta, \qquad (15)$$

où $a_\alpha = k_\alpha^{(-0,5_\alpha)}$.

Donc la minimisation de la fonctionnelle (9) a été ramenée à celle de la fonctionnelle (15). Mais $J_h(v)$ est une fonction de plusieurs variables $v(x_i)$, $x_i \in \bar{\omega}$. Cette fonction atteint son minimum au point $v(x) = y(x)$ où ses dérivées premières sont nulles.

Soit $x \in \omega$. En calculant la dérivée de $J_n(v)$ par rapport à $v(x)$, en l'annulant et en divisant l'équation obtenue par $2h_1h_2$ on aura

$$(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(x), \quad x \in \omega. \tag{16}$$

Nous avons construit l'approximation discrète de l'équation (1). Cette approximation coïncide avec (2), (3) du § 2.

Soit $x \in \gamma$, $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, l_2; nous avons choisi un point situé sur la frontière gauche du rectangle et qui n'est confondu avec aucun nœud. En effectuant les calculs décrits plus haut et en divisant l'équation obtenue par $2h_2$, on obtient

$$a_1^{(+1_1)} y_{x_1} + \frac{h_1}{2}(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = \varkappa_{-1} y - g_{-1} - \frac{h_1}{2} f, \tag{17}$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0, \ l_2.$$

On reconnaît ici l'approximation de l'une des conditions aux limites (8). Sur les autres côtés du rectangle, les conditions aux limites sont approchées de façon analogue.

Supposons enfin que $x \in \gamma$, $x_1 = x_2 = 0$. Tous calculs faits on obtient

$$\frac{h_2}{h_1+h_2} a_1^{(+1_1)} y_{x_1} + \frac{h_1}{h_1+h_2} a_2^{(+1_2)} y_{x_2} =$$
$$= \frac{h_2\varkappa_{-1} + h_1\varkappa_{-2}}{h_1+h_2} y - \frac{h_2 g_{-1} + h_1 g_{-2}}{h_1+h_2} - \frac{h_1 h_2}{2(h_1+h_2)} f, \quad x_1 = x_2 = 0. \tag{18}$$

L'équation (18) peut être considérée comme une approximation discrète de la combinaison linéaire des conditions aux limites (8) pour $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. Les équations du type (18) sont nécessaires pour la fermeture des systèmes d'équations (16), (17).

Estimons l'erreur d'approximation de l'équation (17)

$$\psi = \left[a_1(h_1, x_2) u_{x_1} + \frac{h_1}{2}(a_2 u_{\bar{x}_2})_{x_2} - \varkappa_{-1} u + g_{-1} + \frac{h_1}{2} f\right]\Big|_{x_1=0} =$$
$$= \left[k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \varkappa_{-1} u + \right.$$
$$\left. + g_{-1} + \frac{h_1}{2} f + O(h_1^2 + h_1 h_2^2)\right].$$

Compte tenu de l'équation (1) et de la condition aux limites (8) il vient que $\psi(0, x_2) = O(|h|^2)$. On démontre de façon analogue que l'équation (18) admet une erreur d'approximation de $O(|h|^2)$.

Considérons d'autres conditions aux limites pour l'équation (1). Supposons que sur le rectangle G on cherche la solution de l'équation (1) qui vérifie sur la frontière du rectangle des conditions aux limites du type (23) § 1 et (27) § 1.

De façon plus détaillée, soit

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x),\quad x\in G, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{-\alpha}(x_\beta)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=\varkappa_{-\alpha}u-g_{-\alpha}(x_\beta),\quad x_\alpha=0,\\ -k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{+\alpha}(x_\beta)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=\varkappa_{+\alpha}u-g_{+\alpha}(x_\beta),\quad x_\alpha=l_\alpha,\\ \alpha,\ \beta=1,\ 2,\quad \alpha\neq\beta,\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\left[\sigma_{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_{-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=0,\quad \left[\sigma_{+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\sigma_{+2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=l_1\\x_2=l_2}}=0,\\ \left[\sigma_{-1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\sigma_{+2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=l_2}}=0,\quad \left[\sigma_{+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\sigma_{-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\Big|_{\substack{x_1=l_1\\x_2=0}}=0.\end{gathered} \tag{20}$$

La résolution du problème (1), (19), (20) revient à chercher l'élément $u(x_1, x_2)$ qui minimise la fonctionnelle

$$\begin{aligned}J(v)=&\int\limits_G\left[k_1(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+k_2(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2-2f(x)v\right]dx+\\ &+\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_0^{l_\beta}\left\{\left[\sigma_{-\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2+\varkappa_{-\alpha}v^2-2g_{-\alpha}v\right]\Big|_{x_\alpha=0}+\right.\\ &\left.+\left[\sigma_{+\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2+\varkappa_{+\alpha}v^2-2g_{+\alpha}v\right]\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right\}dx_\beta.\end{aligned} \tag{21}$$

Cette fonctionnelle est la même que la fonctionnelle (9) aux termes $\sigma_{\pm\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2$ près des intégrales de frontière.

Comme dans le cas du schéma discret pour le problème (1), (8), approchons la fonctionnelle (21) sur le réseau $\bar\omega$ en remplaçant les intégrales par des formules de sommation adéquates et les dérivées par des différences. En portant dans (21) l'approximation

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}\int\limits_0^{l_\beta}&\left[\sigma_{-\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2\Big|_{x_\alpha=0}+\sigma_{+\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)^2\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]\sim\\ &\sim\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_\beta^+}\left[\bar\sigma_{-\alpha}v_{\bar x_\beta}^2\big|_{x_\alpha=0=0}+\bar\sigma_{+\alpha}v_{\bar x_\beta}^2\big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right]h_\beta,\end{aligned}$$

où $\bar{\sigma}_{\pm\alpha} = \sigma_{\pm\alpha}(x_\beta - h_\beta/2)$, on déduit de (10) à (14)

$$J_h(v) = \sum_{\omega_1^+\times\bar{\omega}_2} a_1 v_{\bar{x}_1}^2 \hbar_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1\times\omega_2^+} a_2 v_{\bar{x}_2}^2 \hbar_1 h_2 - 2\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2} f v \hbar_1 \hbar_2 +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{2} \Big\{ \sum_{\bar{\omega}_\beta} [\varkappa_{-\alpha} v^2 - 2g_{-\alpha} v)|_{x_\alpha=0} + (\varkappa_{+\alpha} v^2 - 2g_{-\alpha} v)|_{x_\alpha=l_\alpha}] \hbar_\beta +$$

$$+ \sum_{\omega_\beta^+} [\bar{\sigma}_{-\alpha} v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=0} + \bar{\sigma}_{+\alpha} v_{\bar{x}_\beta}^2|_{x_\alpha=l_\alpha}] h_\beta \Big\}.$$

On obtient l'approximation de l'équation (1) et des conditions aux limites (19), (20) en égalant à zéro les dérivées de $J_h(v)$ par rapport à $v(x)$.

Ecrivons les approximations des conditions aux limites (19), (20). Supposons que $x \in \gamma$, $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, l_2. Alors

$$a_1^{(+11)} y_{x_1} + \Big[\Big(\bar{\sigma}_{-1} + \frac{h_1}{2} a_2\Big) y_{\bar{x}_2}\Big]_{x_2} =$$

$$= \varkappa_{-1} y - g_{-1} - \frac{h_1}{2} f, \quad x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0, \ l_2. \tag{22}$$

Si $x_1 = x_2 = 0$, alors

$$\Big(\bar{\sigma}_{-2}^{(+11)} + \frac{h_2}{2} a_1^{(+11)}\Big) y_{x_1} + \Big(\bar{\sigma}_{-1}^{(+12)} + \frac{h_1}{2} a_2^{(+12)}\Big) y_{x_2} =$$

$$= \frac{h_2}{2} \varkappa_{-1} y + \frac{h_1}{2} \varkappa_{-2} y - \frac{h_2}{2} g_{-1} - \frac{h_1}{2} g_{-2} - \frac{h_1 h_2}{4} f, \quad x_1 = x_2 = 0. \tag{23}$$

On écrit de façon analogue les conditions aux limites sur les autres portions de la frontière γ.

En se servant du développement taylorien, on vérifie sans peine que si la solution et les coefficients du problème (1), (19), (20) sont suffisamment différentiables, les conditions aux limites (20) et (23) possèdent une erreur d'approximation de $O(|h|^2)$.

3. Approximation des conditions aux limites de troisième espèce pour équations à dérivées mixtes. Voyons maintenant l'approximation des conditions aux limites pour l'équation (10) § 2. On supposera que l'on cherche la solution de l'équation (10) § 2 dans le rectangle $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ sur la frontière duquel sont données les conditions aux limites (18) § 1. Voici l'écriture détaillée du problème

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta}\Big) = -f(x), \quad x \in G, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} k_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} &= \varkappa_{-\alpha} u - g_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ -k_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} &= \varkappa_{+\alpha} u - g_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \tag{25}$$

On supposera que l'équation (24) est elliptique, et donc, que ses coefficients vérifient la condition (7) § 1. On ne supposera pas que le problème (24), (25) est autoconjugué, i.e. on admettra généralement que $k_{12}(x) \not\equiv k_{21}(x)$.

On construira le schéma discret du problème (24), (25) par approximation de l'identité intégrale (cf. § 3 chap. II).

On rappelle qu'une solution généralisée du problème (24), (25) est une fonction $u(x) \in W_2^1(G)$ qui, quelle que soit $v(x) \in W_2^1(G)$, vérifie l'identité intégrale

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\Big[\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} - fv\Big]\,dx_1\,dx_2 +$$

$$+\int_0^{l_1}[\varkappa_{-2}uv|_{x_2=0} + \varkappa_{+2}uv|_{x_2=l_2} - g_{-2}v|_{x_2=0} - g_{+2}v|_{x_2=l_2}]\,dx_1 +$$

$$+\int_0^{l_2}[\varkappa_{-1}uv|_{x_1=0} + \varkappa_{+1}uv|_{x_1=l_1} - g_{-1}v|_{x_1=0} - g_{+1}v|_{x_1=l_1}]\,dx_2 = 0. \qquad (26)$$

Approchons l'identité intégrale (26) par une somme en remplaçant les intégrales par des sommes intégrales et les dérivées par les différences. Remplaçons les intégrales de frontière et les intégrales de la fonction fv par les formules des trapèzes et les intégrales des fonctions $k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}$ par des combinaisons linéaires des formules des rectangles droits et gauches, ou plus exactement

$$\iint_G k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\,dx_1\,dx_2 \sim$$

$$\sim \frac{1}{4}\Big\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 + \sum_{{}^+\omega_1\times{}^+\omega_2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 +$$

$$+\sum_{{}^+\omega_1\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2 + \sum_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2} k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}h_1h_2\Big\}.$$

Remplaçons dans cette expression les dérivées par les différences correspondantes.

L'identité intégrale (26) se transforme en l'identité suivante:

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Big[\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}_\beta}v_{\bar{x}_\alpha} + \sum_{{}^+\omega_1\times{}^+\omega_2} k_{\alpha\beta}u_{x_\beta}v_{x_\alpha}\Big]h_1h_2 +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{{}^+\omega_1\times\omega_2^+}[k_{11}u_{x_1}v_{x_1} + k_{12}u_{\bar{x}_2}v_{x_1} + k_{21}u_{x_1}v_{\bar{x}_2} + k_{22}u_{\bar{x}_2}v_{\bar{x}_2}]\,h_1h_2 +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}[k_{11}u_{\bar{x}_1}v_{\bar{x}_1}+k_{12}u_{x_2}v_{\bar{x}_1}+k_{21}u_{\bar{x}_1}v_{x_2}+k_{22}u_{x_2}v_{x_2}]\,h_1h_2-$$

$$-\sum_{\bar{\omega}_1\times\bar{\omega}_2} fvh_1h_2+\sum_{\bar{\omega}_1}[(\varkappa_{-2}u-g_{-2})\,v\,|_{x_2=0}+$$

$$+(\varkappa_{+2}u-g_{+2})\,v\,|_{x_2=l_2}]\,h_1+\sum_{\bar{\omega}_2}[(\varkappa_{-1}u-g_{-1})\,v\,|_{x_1=0}+$$

$$+(\varkappa_{+1}u-g_{+1})\,v\,|_{x_1=l_1}]\,h_2=0. \qquad (27)$$

On appellera solution approchée du problème (24), (25) une fonction discrète $y(x)$ définie sur $\bar{\omega}$ qui vérifie l'identité (27) quelle que soit la fonction discrète $v(x)$ définie sur le réseau $\bar{\omega}$. En choisissant la fonction discrète v égale à l'unité en un nœud du réseau et nulle en tous les autres, on obtient l'équation discrète au nœud où v n'est pas nulle. En procédant ainsi avec tous les nœuds du réseau $\bar{\omega}$, on obtient un problème discret qui approche le problème (24), (25). Ceci étant, en tous les nœuds intérieurs du réseau ω on obtient l'approximation (24) qui coïncide avec l'approximation (12) § 2 de la même équation. Aux nœuds frontière γ on obtient l'approximation des conditions aux limites (25). Ainsi lorsque $x_1=0$, $x_2\neq 0$, l_2, les équations discrètes s'écrivent

$$\frac{k_{11}+k_{11}^{(+11)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y_{\overset{\circ}{x}_2}+\frac{h_1}{2}\left\{\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(-12)}}{2}y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}+\right.$$

$$\left.+[(k_{21}y_{x_1})_{\overset{\circ}{x}_2}+(k_{12}y_{\overset{\circ}{x}_2})_{x_1}]\right\}=\varkappa_{-1}y-g_{-1}-\frac{h_1}{2}f,\ x_1=0;\ x_2\neq 0,\ l_2, \qquad (28)$$

et lorsque $x_1=x_2=0$

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+11)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y_{x_2}-\varkappa_{-1}y+g_{-1}\right)+$$

$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+12)}}{2}y_{x_2}+k_{21}y_{x_1}-\varkappa_{-2}y+g_{-2}\right)+$$

$$+\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1}+(k_{21}y_{x_1})_{x_2}+f]=0,\ x_1=x_2=0. \qquad (29)$$

Les équations s'écrivent de façon analogue dans les autres nœuds frontière γ.

On remarquera que lorsque $k_{12}\equiv k_{21}\equiv 0$ les équations (28) se confondent avec les équations (17) et les équations (29) avec les équations (18) à la méthode près de calcul des coefficients.

Il est immédiat de vérifier que si la solution et les coefficients du problème (24), (25) sont suffisamment différentiables, les équations (28) approchent les conditions aux limites (25) avec une erreur

$O(h_1^2 + h_2^2)$ et l'équation (29), la combinaison linéaire des conditions aux limites en un point angulaire seulement avec une erreur de $O(h_1 + h_2)$.

Étudions plus en détail l'erreur d'approximation de l'équation (29). Le développement en séries de Taylor donne

$$\psi(0, 0) = \frac{h_2}{h_1+h_2}\left[k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{h_2}{2}k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \varkappa_{-1}u + g_{-1}\right] + \frac{h_1}{h_1+h_2}\left[k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{h_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \varkappa_{-2}u + g_{-2}\right] +$$
$$+ \frac{h_1 h_2}{2(h_1+h_2)}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + f\right] + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Comme u est solution du problème (24), (25), il vient

$$\psi(0, 0) = \frac{h_2^2}{2(h_1+h_2)}k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_1^2}{2(h_1+h_2)}k_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + O(h_1^2 + h_2^2). \quad (30)$$

De là il résulte que si l'un au moins des nombres $k_{12}(0, 0)$ et $k_{21}(0, 0)$ est non nul, l'erreur d'approximation au point $(0, 0)$ est $O(h_1 + h_2)$.

Montrons comment par changement des coefficients en $y(0, 0)$ dans (29), on peut construire une équation dont l'erreur d'approximation est $O(h_1^2 + h_2^2)$. On supposera de plus que

$$k_{12}(0, 0) + k_{21}(0, 0) \neq 0. \quad (31)$$

Transformons l'expression de l'erreur d'approximation (30) en éliminant les dérivées $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(0, 0)$ et $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(0, 0)$. En vertu de (25), les conditions aux limites lorsque $x_1 = x_2 = 0$ s'écrivent

$$\begin{aligned} k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1} + k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \varkappa_{-1}u - g_{-1}, \\ k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1} + k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \varkappa_{-2}u - g_{-2}. \end{aligned} \quad (32)$$

D'où l'on déduit pour $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_2} &= [k_{11}(\varkappa_{-2}u - g_{-2}) - k_{21}(\varkappa_{-1}u - g_1)]/(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} &= [k_{22}(\varkappa_{-1}u - g_{-1}) - k_{12}(\varkappa_{-2}u - g_{-2})]/(k_{11}k_{12} - k_{12}k_{21}). \end{aligned} \quad (33)$$

Le dénominateur de ces formules n'est pas nul, puisque en vertu de la condition d'ellipticité (7) § 1, l'équation (24)

$$k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} > (k_{12} - k_{21})^2/4. \quad (34)$$

En dérivant la première des conditions (25) par rapport à x_2 pour $\alpha = 1$ et par rapport à x_1 pour $\alpha = 2$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}(\varkappa_{-1}u-g_{-1}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}(\varkappa_{-2}u-g_{-2}).$$

En ajoutant à ces équations l'équation (24) pour $x_1 = x_2 = 0$, on obtient un système d'équations en les dérivées secondes $\partial^2 u/\partial x_1^2$ $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2$, $\partial^2 u/\partial x_2^2$ au point (0, 0). Le déterminant de ce système est

$$-(k_{12}+k_{21})(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})\,|_{x_1=x_2=0}$$

et en vertu de (31), (34) il est non nul. Ceci permet d'exprimer les dérivées secondes de la solution cherchée au point (0, 0) en fonction de la solution elle-même et de ses dérivées premières en ce point. Mais en vertu de (33) les dérivées premières s'expriment au point (0, 0) en fonction de la solution elle-même, par conséquent les dérivées secondes peuvent être représentées par

$$k_{\beta\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}(0,0)=\mu_\alpha u(0,0)-\nu_\alpha,\quad \beta\neq\alpha.$$

Portons ces valeurs dans les dérivées de (30)

$$\psi(0,0)=\frac{h_2^2}{2(h_1+h_2)}(\mu_2 u(0,0)-\nu_2)+$$
$$+\frac{h_1^2}{2(h_1+h_2)}(\mu_1 u(0,0)-\nu_1)+O(h_1^2+h_2^2).$$

Il s'ensuit que l'équation discrète

$$\frac{h_2}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+11)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y_{x_2}-\varkappa_1^* y+g_{-1}^*\right)+$$
$$+\frac{h_1}{h_1+h_2}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+12)}}{2}y_{x_2}+k_{21}y_{x_1}-\varkappa_{-2}^* y+g_{-2}^*\right)+$$
$$+\frac{h_1h_2}{2(h_1+h_2)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1}+(k_{21}y_{x_1})_{x_2}+f]=0,$$

où

$$\varkappa_{-\alpha}^*=\varkappa_{-\alpha}+\frac{h_\beta}{2}\mu_\beta,\quad g_{-\alpha}^*=g_{-\alpha}+\frac{h_\beta}{2}\nu_\beta,\quad \beta\neq\alpha,$$

possède une erreur d'approximation de $O(h_1^2+h_2^2)$.

Si le réseau $\bar\omega$ est irrégulier, on peut par la méthode d'approximation de l'identité intégrale construire les analogues suivants des

conditions (28) et (29):

$$\frac{k_{\alpha\alpha}+k_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}}{2}y_{x_\alpha}+k_{\alpha\beta}\frac{y_{\hat{x}_\beta}+y_{\check{x}_\beta}}{2}+\frac{h_\alpha^+}{4}[(k_{\beta\beta}y_{x_\beta})_{\hat{x}_\beta}+$$
$$+(k_{\beta\beta}y_{x_\beta})_{\check{x}_\beta}+(k_{\beta\alpha}y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\beta}+(k_{\alpha\beta}y_{\check{x}_\beta})_{x_\alpha}+(k_{\beta\alpha}y_{x_\alpha})_{\check{x}_\beta}+$$
$$+(k_{\alpha\beta}y_{\hat{x}_\beta})_{x_\alpha}]=\varkappa_{-\alpha}y-g_{-\alpha}-\frac{h_\alpha^+}{2}f,\quad x_\alpha=0,\quad x_\beta\neq 0,\ l_\beta, \tag{35}$$

$$\frac{h_2^+}{h_1^++h_2^+}\left(\frac{k_{11}+k_{11}^{(+1_1)}}{2}y_{x_1}+k_{12}y_{x_2}-\varkappa_{-1}y+g_{-1}\right)+$$
$$+\frac{h_1^+}{h_1^++h_2^+}\left(\frac{k_{22}+k_{22}^{(+1_2)}}{2}y_{x_2}+k_{21}y_{x_1}-\varkappa_{-2}y+g_{-2}\right)+$$
$$+\frac{h_1^+h_2^+}{2(h_1^++h_2^+)}[(k_{12}y_{x_2})_{x_1}+(k_{21}y_{x_1})_{x_2}+f]=0,\quad x_1=x_2=0 \tag{36}$$

etc.

4. Schéma discret d'ordre supérieur d'approximation pour le problème de Neumann. Considérons sur le rectangle $G=\{x=(x_1,x_2)\mid 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$ le second problème aux limites pour l'équation de Poisson (problème de Neumann):

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=-f(x),\quad x\in G,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=-g_{-\alpha}(x_\beta),\quad x_\alpha=0, \tag{37}$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=-g_{+\alpha}(x_\beta),\quad x_\alpha=l_\alpha,\quad \beta\neq\alpha. \tag{38}$$

Le problème (37), (38) est un cas particulier du problème (1), (8), que nous avons déjà considéré, et s'en déduit pour $k_1\equiv k_2\equiv 1$, $\varkappa_{\pm\alpha}=0$.

Ecrivons le schéma discret (16), (17), (18), approximant le problème (1), (8) pour le cas du problème (37), (38).

Introduisons la notation

$$\overline{\Lambda}_\alpha v=\begin{cases}\dfrac{2}{h_\alpha}v_{x_\alpha}, & x_\alpha=0,\\ v_{\bar{x}_\alpha,x_\alpha}, & x_\alpha\neq 0,\ l_\alpha,\\ -\dfrac{2}{h_\alpha}v_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha=l_\alpha.\end{cases} \tag{39}$$

Le schéma discret approximant le problème (37), (38) s'écrit

$$(\overline{\Lambda}_1+\overline{\Lambda}_2)y=-\varphi(x),$$

où

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in \omega, \\ f(x) + \frac{2}{h_\alpha} g_{\mp\alpha}(x_\beta), \ x \in \bar{\omega}, \ x_\alpha = 0, \ l_\alpha, \ x_\beta \neq 0, \ l_\beta, \\ f(x) + \frac{2}{h_1} g_{\mp 1} + \frac{2}{h_2} g_{\mp 2}, \ x \in \bar{\omega}, \ x_1 = 0, \ l_1, \ x_2 = 0, \ l_2. \end{cases}$$

Au § 1, chap. III, on a construit l'équation discrète (6), (7)

$$\Lambda' y \equiv \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = -\varphi'(x), \ x \in \omega, \tag{40}$$

où

$$\Lambda_\alpha v = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \varphi' = f + \frac{1}{12}\left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right),$$

qui approche l'équation de Poisson (37) avec l'erreur $O(h_1^4 + h_2^4)$.

Construisons le schéma discret qui approche le problème (37), (38) avec une erreur de $O(h_1^4 + h_2^4)$. Par analogie avec (40), on cherchera le schéma discret sous la forme

$$\bar{\Lambda}' y \equiv \bar{\Lambda}_1 y + \bar{\Lambda}_2 y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2 y = -\Phi'(x), \ x \in \bar{\omega}, \tag{41}$$

où le second membre $\Phi'(x)$ pour $x \in \bar{\omega}$ est tel que l'erreur d'approximation soit de l'ordre de grandeur désirée.

Si pour $x \in \omega$ on pose $\Phi' = \varphi'$, l'équation (41) coïncide avec l'équation (40) et, par conséquent, elle approchera (37) avec l'erreur $O(h_1^4 + h_2^4)$.

Reste maintenant à se donner Φ' sur la frontière γ. Considérons d'abord l'équation (41) pour $x_1 = 0$ et $x_2 \neq 0, l_2$. En tenant compte de (39) écrivons l'équation (41) sous la forme:

$$y_{x_1} + \frac{h_1}{2} y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \Phi' = 0. \tag{42}$$

Calculons l'erreur d'approximation ψ de cette équation

$$\psi = u_{x_1} + \frac{h_1}{2} u_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} u_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1}{2} \Phi' =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \Delta u + \frac{h_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \Delta u + \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u +$$

$$+ \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2} \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4).$$

En se servant de l'équation (37) et la condition aux limites (38), on déduit

$$\psi = -g_{-1} - \frac{h_1}{2} f - \frac{h_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) - \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial f}{\partial x_1} -$$

$$- \frac{h_2^2 - h_1^2}{12} \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2} + \frac{h_1}{2} \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Donc pour que l'erreur d'approximation de l'équation (42) soit $O(h_1^4 + h_2^4)$ il suffit de poser

$$\Phi' = f + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{2}{h_1}\left(g_{-1} + \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right) =$$
$$= \varphi' + \frac{2}{h_1}\left(g_{-1} + \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right)$$

pour $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, l_2.

Définissons maintenant Φ' pour $x_1 = x_2 = 0$. En tenant compte de (39) mettons (41) sous la forme

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} y_{x_1} + \frac{h_1}{h_1 + h_2} y_{x_2} + \frac{1}{6}\frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1 + h_2} y_{x_1 x_2} + \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}\Phi' = 0.$$

Calculons l'erreur d'approximation de cette équation

$$\psi(0, 0) = \frac{h_2}{h_1 + h_2} u_{x_1} + \frac{h_1}{h_1 + h_2} u_{x_2} + \frac{1}{6}\frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1 + h_2} u_{x_1 x_2} + \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}\Phi' =$$
$$= \frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}\left\{\frac{2}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{2}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \Delta u + \left(\frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Delta u + \right.$$
$$+ \frac{h_1}{3}\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u + \frac{h_2^2 - h_1^2}{6h_1}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_2}{3}\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta u + \frac{h^2 - h_2^2}{6h_2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial u}{\partial x_2} +$$
$$+ \frac{h_1(h_1^2 + h_2^2)}{18h_2}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{h_2(h_1^2 + h_2^2)}{18h_1}\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\frac{\partial u}{\partial x_1} +$$
$$\left. + \frac{h_1^2 + h_2^2}{3h_1 h_2}\left(\sigma\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + (1 - \sigma)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4)\right\}.$$

Utilisons l'équation (37) et les conditions aux limites (38) pour transformer l'expression de l'erreur d'approximation :

$$\psi(0, 0) = -\frac{h_1 h_2}{2(h_1 + h_2)}\left\{\varphi' + \frac{2}{h_1}\left(g_{-1} + \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{6}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right) + \right.$$
$$+ \frac{2}{h_2}\left(g_{-2} + \frac{h_2^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{h_1^2 - h_2^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x_1^2}\right) +$$
$$+ \frac{4}{h_1 h_2}\left(\frac{h_2^2(h_1^2 + h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^3} + \frac{h_1^2(h_1^2 + h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-2}}{\partial x_1^3} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\sigma\frac{\partial g_{-1}}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}(1 - \sigma)\frac{\partial g_{-2}}{\partial x_1}\right) - \Phi' + O(h_1^4 + h_2^4)\right\}.$$

De l'aspect de l'erreur d'approximation il s'ensuit que ce sera une grandeur de l'ordre de $O(h_1^4 + h_2^4)$ si l'on pose

$$\Phi'(0, 0) = \varphi'(0, 0) + \frac{2}{h_1}\left[g_{-1} + \frac{h_1}{6}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{h_2^2 - h_1^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x_2^2}\right] +$$
$$+ \frac{2}{h_2}\left[g_{-2} + \frac{h_2^2}{6}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{h_1^2 - h_2^2}{12}\frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x_1^2}\right] +$$
$$+ \frac{4}{h_1 h_2}\left[\frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\sigma\frac{\partial g_{-1}}{\partial x_2} + \frac{h_2^2(h_1^2 + h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-1}}{\partial x_2^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}(1 - \sigma)\frac{\partial g_{-2}}{\partial x_1} + \frac{h_1^2(h_1^2 + h_2^2)}{72}\frac{\partial^3 g_{-2}}{\partial x_1^3}\right] \text{ pour } x_1 = 0,\ x_2 = 0,$$

où σ est un paramètre arbitraire dont l'adéquation du choix apparaîtra après l'étude de la vitesse de convergence du schéma (41).

Le second membre Φ' se définit de façon analogue sur les autres portions de la frontière γ.

5. Approximation des conditions aux limites de troisième espèce sur une frontière curviligne (réseau accordé). Jusqu'ici nous avons construit des approximations des conditions aux limites renfermant les dérivées dans le cas où la portion de frontière sur laquelle était considérée la condition aux limites était droite ou parallèle à l'un des axes de coordonnées. Aux points 5 et 6 nous allons nous placer dans le cas plus général où la portion de frontière est soit curviligne soit droite, mais n'est parallèle à aucun des axes de coordonnées.

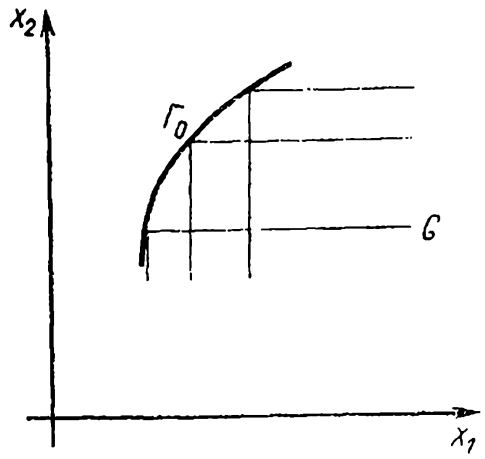


Fig. 21.

Supposons que dans un domaine G on demande de trouver une solution de l'équation (37) qui sur la portion Γ_0 de la frontière de G vérifie la condition

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa u - g(x), \qquad x \in \Gamma_0, \qquad (43)$$

où n est la direction de la normale intérieure à Γ_0. Supposons que Γ_0 est définie par les équations

$$x_\alpha = \mu_\alpha(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad \alpha = 1, 2. \qquad (44)$$

On supposera pour fixer les idées que les dérivées $\mu'_\alpha(t)$ des fonctions $\mu_\alpha(t)$ sont positives et vérifient les conditions

$$0 < m\mu'_1(t) \leqslant \mu'_2(t) \leqslant M\mu'_1(t) < \infty, \qquad (45)$$

et que le domaine est situé à droite de la frontière (fig. 21).

On dira que le domaine G a été tramé d'un réseau *accordé* (un réseau accordé avec la portion de frontière Γ_0) si ses nœuds sont donnés par les points de concours des droites

$$x_\alpha = \mu_\alpha(t_i), \quad \alpha = 1, 2, \quad i = 0, \pm 1, \ldots$$

(fig. 21).

Construisons l'approximation de la condition aux limites (43) sur le réseau accordé. Mettons-la sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n, x_2) = \varkappa y - g(x)$$

et construisons l'approximation la plus simple de cette condition

$$y_{x_1}\cos(n, x_1) + y_{x_2}\cos(n, x_2) = \varkappa y - g.$$

Calculons l'erreur d'approximation de cette équation

$$\psi = u_{x_1}\cos(n, x_1) + u_{\bar{x}_2}\cos(n, x_2) - \varkappa u + g =$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{h_1^+}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + O((h_1^+)^2)\right]\cos(n, x_1) +$$

$$+ \left[\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{h_2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + O(h_2^2)\right]\cos(n, x_2) - \varkappa u + g =$$

$$= \frac{h_1^+}{2}\cos(n, x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{h_2}{2}\cos(n, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

Transformons l'expression de l'erreur d'approximation. Supposons que le pas h_1^+ est donné et définissons le pas h_2 à partir de la condition

$$\frac{h_1^+}{2}\cos(n, x_1) = -\frac{h^2}{2}\cos(n, x_2) + O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

En remarquant que dans le cas considéré

$$\cos(n, x_1) = \frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_2'^2 + \mu_2'^2}}, \quad \cos(n, x_2) = -\frac{\mu_1'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}}$$

on peut mettre la condition du choix de h_2 sous la forme suivante

$$(h_1^+\mu_2' - h_2\mu_1')/(2\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}) = O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

En tenant compte de (45) on établit que cette condition est remplie si l'on pose

$$h_2 = h_1^+\frac{\mu_2'}{\mu_1'} + O((h_1^+)^2). \tag{46}$$

Supposons que (46) est réalisée. En tenant compte de (37), on peut mettre l'erreur d'approximation sous la forme

$$\psi = \frac{h_1^+}{2}\frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}}\Delta u + O((h_1^+)^2 + h_2^2) =$$

$$= -\frac{h_1^+}{2}\frac{\mu_2'}{\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}} f + O((h_1^+)^2 + h_2^2).$$

D'où il s'ensuit que la condition aux limites discrète

$$y_{x_1}\cos(n, x_1) + y_{\bar{x}_2}\cos(n, x_2) = \varkappa y - \left(g + \frac{h_1^+\mu_2'}{2\sqrt{\mu_1'^2 + \mu_2'^2}}\right) \tag{47}$$

approche la condition (43) avec l'erreur $O((h_1^+)^2 + h_2^2)$.

6. Approximation d'une condition aux limites de troisième espèce sur une frontière curviligne (réseau non accordé). Au point précédent on a construit une approximation de la condition aux limites en question pour l'équation de Poisson sur un réseau spécial (accordé). Ici on se propose d'étudier une approximation de cette condition aux limites pour l'équation de Poisson sur une frontière curviligne dans un cas plus général, i.e. sur un réseau non accordé. On se servira

de la méthode de Ritz pour construire l'approximation discrète de la condition aux limites et de l'équation au voisinage de la frontière.

Etant donné un domaine G de frontière Γ on demande la solution du problème

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa(x)\, u - g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{48}$$

où la fonction $\varkappa(x) \geqslant 0$ pour $x \in \Gamma$ et $\varkappa(x) \not\equiv 0$. La résolution du problème (48) revient à chercher une fonction $u(x) \in W_2^1(G)$ minimisant la fonctionnelle suivante:

$$I(u) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Gamma \varkappa u^2\, ds -$$

$$- \int\limits_G f(x)\, u(x)\, dx - \int\limits_\Gamma g(x)\, u(x)\, ds. \tag{49}$$

Recouvrons le plan Ox_1x_2 d'un réseau rectangulaire régulier

$$\Omega = \{x = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha i_\alpha,\ i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \alpha = 1, 2\}.$$

Partageons chaque maille rectangulaire

$$G[i] = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)},\ \alpha = 1, 2\}$$

en deux triangles à l'aide de la diagonale de pente $\operatorname{arctg} h_2/h_1$. Comme au pt. 2 § 2, désignons par $\bar{G}_h$ la plus petite union des triangles indiqués, contenant G, et prenons pour sous-espace fini V de l'espace $W_2^1(G)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\bar{G}_h$ et linéaires sur tout triangle. Soit $\bar{\omega} = \bar{G}_h \cap \Omega$ le réseau sur lequel est considéré le problème (48), $\omega = \bar{\omega} \cap G$ l'ensemble de ses nœuds intérieurs, $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ l'ensemble de ses nœuds frontière. Soit

$$\mathfrak{M} = \{i = (i_1, i_2) \mid x_i \in \bar{\omega}\}.$$

Cherchons la solution approchée du problème (48) sous la forme

$$\bar{u}(x) = \sum_{j \in \mathfrak{M}} y_j \eta_j(x), \quad j = (j_1, j_2) \tag{50}$$

où $\{\eta_j\}$ est une base de l'espace V, dont les éléments $\eta_j(x)$ sont définis par (16) § 2.

Portons comme toujours l'expression (50) dans la fonctionnelle (49), dérivons l'expression obtenue par rapport à y_j et annulons le résultat obtenu. On obtient le système d'équations

$$\sum_{j \in \mathfrak{M}} A_i^j y_j = \Phi_i, \quad i \in \mathfrak{M}, \tag{51}$$

où les coefficients du système sont calculés à l'aide de la formule

$$A_i^j = \int_G \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_2} \right] dx + \int_\Gamma \varkappa \eta_i \eta_j \, ds, \tag{52}$$

et les termes du second membre à l'aide de la formule

$$\Phi_i = \int_G f \eta_i \, dx + \int_\Gamma g \eta_i \, ds. \tag{53}$$

Calculons les coefficients A_i^j et les seconds membres Φ_i pour les i correspondant aux nœuds frontière γ et à certains nœuds intérieurs adjacents à la frontière. Pour mener les calculs au bout on supposera que la frontière est rectiligne au voisinage du nœud étudié. Bien plus on supposera pour la simplicité que $\varkappa(x) = 0$ sur la portion de frontière considérée.

Soit $x_i \in \omega$ et $x_{i'} \in \gamma$, où $i' = (i_1 + 1, i_2)$. On supposera que le nœud x_i est placé à l'origine des coordonnées, i.e. $i_1 = i_2 = 0$ et que la frontière Γ, au voisinage de ce nœud, a pour équation

$$\frac{x_1}{\theta_1 h_1} + \frac{x_2}{\theta_2 h_2} = 1, \tag{54}$$

où $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

Calculons les coefficients et les seconds membres des équations (51) pour le nœud intérieur (0, 0) et le nœud frontière (h_1, h_2). Numérotons les nœuds qui nous intéressent de la façon suivante : 0 est le nœud de coordonnées (0, 0), 1 le nœud $(h_1, 0)$, 2 le nœud $(0, h_2)$, 3 le nœud $(-h_1, 0)$, 4 le nœud $(0, -h_2)$ et 5 le nœud (h_1, h_2). Portant dans (52) les expressions des dérivées $\partial \eta_i / \partial x_\alpha$ de (20) § 2 et tenant compte du fait que les coordonnées des points d'intersection de la frontière d'équation (54) avec les droites $x_1/h_1 - x_2/h_2 = 0$ et $x_1/h_1 - x_2/h_2 = \pm 1$ sont respectivement

$$\left(\frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} h_1, \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} h_2 \right), \quad \left(-\frac{\theta_1 (1 - \theta_2)}{\theta_1 + \theta_2} h_1, \frac{(1 + \theta_1) \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} h_2 \right),$$
$$\left(\frac{\theta_1 (1 + \theta_2)}{\theta_1 + \theta_2} h_1, -\frac{(1 - \theta_1) \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} h_2 \right),$$

on déduit les coefficients des équations, soit :

pour le point 0 :

$$A_0^1 = -\frac{h_2}{2h_1} \frac{\theta_1 (1 + 2\theta_2)}{\theta_1 + \theta_2}, \qquad A_0^2 = -\frac{h_1}{2h_2} \frac{\theta_2 (1 + 2\theta_1)}{\theta_1 + \theta_2},$$
$$A_0^3 = -\frac{h_2}{2h_1} \frac{\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_2^2}{\theta_1 + \theta_2},$$
$$A_0^4 = -\frac{h_1}{2h_2} \frac{2\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_1^2\theta_2}{\theta_1 + \theta_2},$$
$$A_0^0 = -(A_0^1 + A_0^2 + A_0^3 + A_0^4)$$

pour le point 5:

$$A_5^1 = -\frac{h_1}{2h_2}\frac{\theta_1^2\theta_2}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_5^2 = -\frac{h_2}{2h_1}\frac{\theta_1\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2}, \quad A_5^5 = -(A_5^1+A_5^2).$$

Portant dans (53) l'expression de $\eta_i(x)$ (16) § 2, il vient

$$\Phi_0 = \int\limits_{G\cap G[0]} f(x)\,\eta_0(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} g(x)\,\eta_0(x)\,ds,$$

$$\Phi_5 = \int\limits_{G\cap G[5]} f(x)\,\eta_5(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} g(x)\,\eta_5(x)\,ds.$$

Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont constantes au voisinage du point 0, alors

$$\Phi_0 = f\frac{h_1h_2}{6(\theta_1+\theta_2)^2}[3(\theta_1+\theta_2)^2+6\theta_1\theta_2(\theta_1+\theta_2)+\theta_1^2\theta_2^2(\theta_1+\theta_2)-$$
$$-2\theta_1^2\theta_2^2(\theta_1^2+\theta_2^2)]+g\frac{\sqrt{h_1^2\theta_1^2+h_2^2\theta_2^2}}{\theta_1+\theta_2}\left(1-\frac{\theta_1\theta_2}{2}\right),$$

$$\Phi_5 = f\frac{h_1h_2}{6}\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2}+g\frac{\sqrt{h_1^2\theta_1^2+h_2^2\theta_2^2}}{2(\theta_1+\theta_2)}\theta_1\theta_2.$$

Portant les coefficients trouvés et les seconds membres dans (51), on obtient les équations suivantes:

$$\frac{1}{h_1}\left[\frac{\theta_1(1+2\theta_2)}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{\theta_1+2\theta_2+2\theta_1\theta_2-\theta_1\theta_2^2}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_0-y_3}{h_1}\right]+$$
$$+\frac{1}{h_2}\left[\frac{\theta_2(1+2\theta_1)}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_2-y_0}{h_2}-\frac{\theta_2+2\theta_1+2\theta_1\theta_2-\theta_1^2\theta_2}{2(\theta_1+\theta_2)}\frac{y_0-y_4}{h_2}\right]=-\frac{1}{h_1h_2}\Phi_0,$$

$$\frac{h_2}{2}\frac{\theta_1\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2}\frac{y_5-y_2}{h_1}+\frac{h_1}{2}\frac{\theta_1^2\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\frac{y_5-y_1}{h_2}=-\Phi_5.$$

§ 4. Problèmes aux limites pour systèmes d'équations de la théorie de l'élasticité

Dans ce paragraphe on indiquera les positions des principaux problèmes de la théorie de l'élasticité d'un corps isotrope dans le cas d'une déformation plane. On composera des équations discrètes qui approcheront les équations d'équilibre et les conditions aux limites pour elles. Tous ces problèmes seront étudiés sur un rectangle de côtés parallèles aux axes de coordonnées.

1. Principaux problèmes plans de la théorie de l'élasticité. Au § 1 chapitre I, on a montré que le système d'équations d'équilibre d'un corps élastique isotrope homogène, faisant l'objet d'une déformation plane, était de la forme (31). Si le corps n'est pas homogène et que la déformation reste plane, les équations d'équilibre s'écri-

vent alors en vertu de (30) § 1 chapitre I :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left((2\mu+\lambda)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+F_1=0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x_2}\left((2\mu+\lambda)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+F_2=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

On rappelle que dans le système (1) les fonctions inconnues $u_1(x)$ et $u_2(x)$ figurent les déplacements du point suivant les directions des axes Ox_1 et Ox_2 respectivement et que $\lambda(x)>0$ et $\mu(x)>0$ sont les coefficients de Lamé qui caractérisent les propriétés élastiques du corps.

On peut poser pour le système d'équations (1) le problème de la recherche du vecteur $u=(u_1, u_2)$ sous réserve que le vecteur u soit donné sur la frontière Γ du domaine (*premier problème aux limites*)

$$u_1=g_1,\quad u_2=g_2\quad \text{pour } x\in\Gamma. \tag{2}$$

Si les contraintes sont données sur la frontière du domaine, on obtient le *deuxième problème aux limites*. En vertu de (28), (29) et (32) § 1 chap. I les conditions aux limites seront alors de la forme

$$\begin{aligned}
&\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n, x_1)+\\
&\qquad+\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos(n, x_2)=-f_1,\\
&\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos(n, x_1)+\\
&\qquad+\left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n, x_2)=-f_2,
\end{aligned}\tag{3}$$

où n est la direction de la normale intérieure à la frontière Γ.

Si sur la frontière du domaine sont données la composante normale du vecteur déplacement et la composante tangentielle du vecteur contrainte, on a le *troisième problème aux limites*

$$\begin{aligned}
&u_1\cos(n, x_1)+u_2\cos(n, x_2)=g,\\
&\mu\left[2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\cos(n, x_1)\cos(n, x_2)+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)(\cos^2(n, x_1)-\cos^2(n, x_2)\right]=-f.
\end{aligned}\tag{4}$$

Le problème mixte est souvent posé pour le système (1) lorsque des conditions aux limites de différente espèce sont données sur diverses parties de la frontière.

Ecrivons les conditions (3) et (4) dans le cas où la frontière est parallèle à l'axe Ox_1 et le domaine situé au-dessus de lui :

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-f_1(x,0),$$

$$\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=-f_2(x_1,0), \tag{5}$$

$$u_2=g(x_1,0),\quad \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=-f(x_1,0). \tag{6}$$

2. Approximation discrète du problème (1), (3). Soit à construire un schéma discret approchant le système d'équations (1) avec les conditions aux limites (3) dans le cas où le domaine est un rectangle de côtés parallèles aux axes de coordonnées. On se servira de la méthode de Ritz.

Soit $G=\{x=(x_1,x_2)\mid 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$ et Γ la frontière de G. Il est immédiat de vérifier que la solution du problème (1), (3) dans le domaine G, si elle existe, réalise le minimum de la fonctionnelle

$$J(u)=W(u)-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}(F_1u_1+F_2u_2)\,dx_1\,dx_2-$$
$$-\int_0^{l_1}[f_1(x_1,0)u_1+f_1(x_1,l_2)u_1+f_2(x_1,0)u_2+f_2(x_1,l_2)u_2]\,dx_1-$$
$$-\int_0^{l_2}[f_1(0,x_2)u_1+f_1(l_1,x_2)u_1+f_2(0,x_2)u_2+f_2(l_1,x_2)u_2]\,dx_2, \tag{7}$$

où

$$W(u)=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1\,dx_2 \tag{8}$$

est l'énergie de déformation élastique du corps.

On appellera solution du problème (1), (3) le vecteur $u=(u_1,u_2)$, $u_\alpha\in W_2^1(G)$ qui minimise la fonctionnelle (7).

Comme le veut la méthode de Ritz approchons l'espace $W_2^1(G)$ par un sous-espace de dimension finie V et appelons solution approchée du problème (1), (3) le vecteur $\bar u=(\bar u_1,\bar u_2)$ $\bar u_\alpha\in V$ qui minimise la fonctionnelle (7) sur V.

Construisons l'espace approximant comme au pt. 2 § 2 à l'aide de la méthode de Boubnov-Galérkine. Plus exactement soit $\bar\omega=$

$= \{x = x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\ h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, \ldots, N_\alpha;\ \alpha = 1, 2\}$ un réseau régulier rectangulaire dans le domaine $\bar{G}$. Divisons le domaine $\bar{G}$ en mailles rectangulaires de côtés h_1 et h_2 et de sommets les nœuds du réseau $\bar{\omega}$. Supposons que $G[i] = \{x=(x_1, x_2) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} \leqslant x_\alpha \leqslant x_\alpha^{(i_\alpha+1)}\}$. Les droites qui passent par les sommets opposés $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$ et $(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2+1)})$ partagent les mailles $G[i]$ en triangles. Notons les triangles supérieurs gauches $\Delta^+[i]$

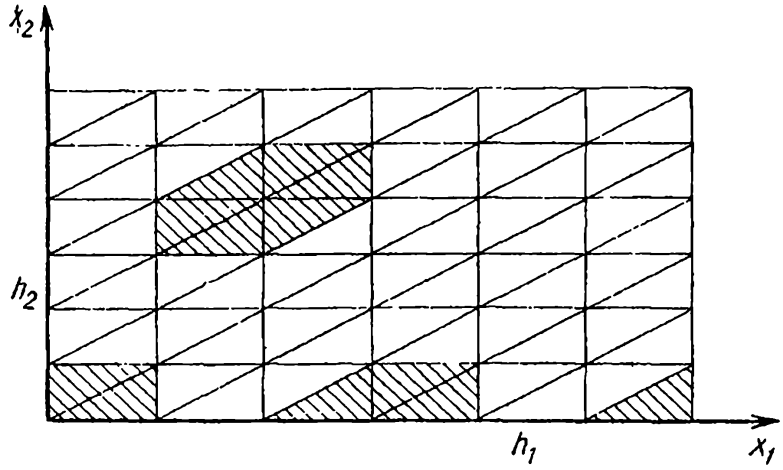


Fig. 22

et les inférieurs droits $\Delta^-[i]$. (La figure 22 représente la partition du domaine $\bar{G}$ en triangles.) Pour sous-espace V de $W_2^1(G)$ prenons l'espace des fonctions continues dans $\bar{G}$ et linéaires sur tout triangle $\Delta^\pm[i]$.

On cherchera la solution approchée du problème (1), (3) sous la forme

$$\bar{u}(x) = (\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)),$$

$$\bar{u}_\alpha(x) = \sum_{j_1=0}^{N_1} \sum_{j_2=0}^{N_2} y_{\alpha j_1 j_2} \eta_{j_1 j_2}(x), \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \bar{G}, \tag{9}$$

où $\{\eta_j(x)\}$, $j = (j_1, j_2)$ est une base de l'espace V.

Pour se servir de (9) il faut se donner une base dans V. Il est évident que l'on peut prendre l'ensemble des fonctions continues dans G linéaires sur chaque triangle $\Delta^\pm[i]$ et telles que chacune d'elles soit non nulle en un seul nœud du réseau $\bar{\omega}$. On supposera que $\eta_i(x_i) = 1$. Dans cette base les coefficients de (9) représentent les valeurs de la solution approchée aux nœuds du réseau $\bar{\omega}$.

Il est évident que chaque fonction base $\eta_i(x)$ est non nulle dans l'un seulement des domaines hachurés de la figure 22. L'expression de la fonction coordonnée $\eta_i(x)$ pour $0 < i_\alpha < N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ (la fonction correspondant à un nœud intérieur du réseau $\bar{\omega}$) est de la

forme (16) § 2, où en vertu de l'uniformité du réseau $\bar{\omega}$, il importe de poser $h_\alpha^+ = h_\alpha$. Si l'un ou les deux indices de la fonction $\eta_{i_1 i_2}$ prennent les valeurs 0 ou N_α, l'expression de cette fonction peut être déduite sans peine de (16) § 2. La figure 23 représente les fonctions $\eta_i(x)$ dans les domaines où elles ne sont pas nulles.

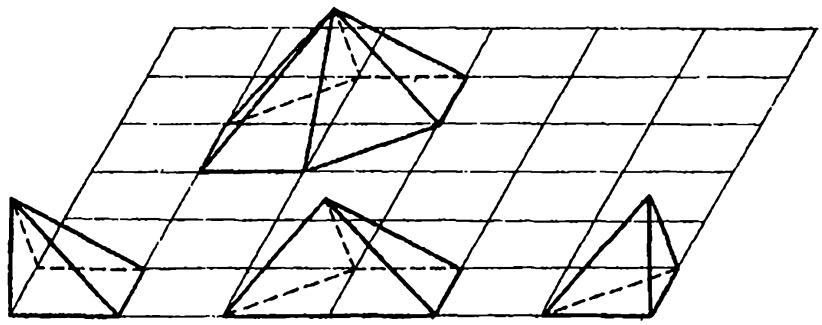


Fig. 23

Trouvons les équations que doivent satisfaire les paramètres inconnus $y_{\alpha j}$ de (9). A ces fins portons $\bar{u}(x)$ de (9) dans (7), (8). On obtient ainsi une fonction $J(\bar{u})$ qui dépend de $2(N_1+1)(N_2+1)$ variables $y_{\alpha i}$.

En dérivant $J(\bar{u})$ par rapport à ces variables et en annulant les dérivées premières, on obtient un système d'équations linéaires algébriques pour la détermination des paramètres $y_{\alpha i_1 i_2}$. Ce système s'écrit

$$\sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2}\sum_{\beta=1}^{2} A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} y_{\beta j_1 j_2} = \varphi_{\alpha i_1 i_2}, \quad i_\alpha = 0, \ldots, N_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \tag{10}$$

où

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha j_1 j_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\alpha} + \mu\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\beta}\right]dx_1\,dx_2, \tag{11}$$

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[\lambda\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\alpha} + \mu\frac{\partial\eta_{j_1 j_2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\eta_{i_1 i_2}}{\partial x_\beta}\right]dx_1\,dx_2,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\varphi_{\alpha i_1 i_2} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} F_\alpha \eta_{i_1 i_2}\,dx_1\,dx_2 + \int_\Gamma f_\alpha \eta_{i_1 i_2}\,ds. \tag{12}$$

Calculons les coefficients $A_{\alpha i}^{\beta j}$ à partir de l'aspect des dérivées $\partial\eta_i/\partial x_\alpha$ qui sont définies par les expressions (20) § 2 pour $h_\alpha^+ = h_\alpha$. De (11) et (20) § 2 il s'ensuit que $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2} = 0$ pour $|i_1 - j_1| > 1$ ou

$|i_2 - j_2| > 1$. De plus $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,\, i_2+1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_2+1,\, i_2-1} = 0$. Donc seuls peuvent être non nuls les coefficients

$$A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 i_2},\ A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\, i_2},\ A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\, i_2+1},\ A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\, i_2-1},\ A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,\, i_2-1},\ A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\, i_2+1}.$$

Supposons que les coefficients de Lamé λ et μ sont constants. Calculons d'abord $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2}$ pour $i_\alpha \neq 0, N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

$$\begin{gathered}
A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1 i_2} = 2\left[\frac{h_\beta}{h_\alpha}(\lambda + 2\mu) + \frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu\right], \quad \alpha \neq \beta \\
A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1-1,\, i_2} = A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1+1,\, i_2} = -\frac{h_2}{h_1}(\lambda + 2\mu), \\
A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1,\, i_2+1} = A_{1 i_1 i_2}^{1 i_1,\, i_2-1} = -\frac{h_1}{h_2}\mu, \\
A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1-1,\, i_2} = A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1+1,\, i_2} = -\frac{h_2}{h_1}\mu, \\
A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1,\, i_2-1} = A_{2 i_1 i_2}^{2 i_1,\, i_2+1} = -\frac{h_1}{h_2}(\lambda + 2\mu), \\
A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1+1,\, i_2+1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\alpha i_1-1,\, i_2-1} = 0, \quad A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1 i_2} = -(\lambda + \mu), \\
A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,\, i_2} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\, i_2} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\, i_2-1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1,\, i_2+1} = \frac{\lambda + \mu}{2}, \\
A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1+1,\, i_2+1} = A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta i_1-1,\, i_2-1} = -\frac{(\lambda + \mu)}{2}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Calculons maintenant $A_{\alpha i_1 0}^{\beta j_1 j_2}$ pour $i_1 \neq 0, N_1$. En vertu de la remarque précédente, seuls peuvent être non nuls les coefficients

$$A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 0},\ A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 1},\ A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,\, 0},\ A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1-1,\, 0},\ A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,\, 1},$$

qui sont respectivement égaux à

$$\begin{gathered}
A_{\alpha i_1 0}^{\alpha i_1 0} = \frac{h_\beta}{h_\alpha}(\lambda + 2\mu) + \frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu, \quad \alpha \neq \beta, \\
A_{1 i_1 0}^{1 i_1 1} = -\frac{h_1}{h_2}\mu, \\
A_{1 i_1 0}^{1 i_1+1,\, 0} = A_{1 i_1 0}^{1 i_1-1,\, 0} = -\frac{h_2}{2h_1}(\lambda + 2\mu), \\
A_{2 i_1 0}^{2 i_1 1} = -\frac{h_1}{h_2}(\lambda + 2\mu), \\
A_{2 i_1 0}^{2 i_1+1,\, 0} = A_{2 i_1 0}^{2 i_1-1,\, 0} = -\frac{h_2}{2h_1}\mu, \\
A_{\alpha i_1 0}^{\alpha i_1+1,\, 1} = 0, \\
A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 0} = A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1+1,\, 1} = -\frac{\lambda + \mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta,
\end{gathered} \tag{14}$$

$$A_{\alpha i_1 0}^{\beta i_1 1} = \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$A_{1 i_1 0}^{2 i_1+1,\, 0} = A_{2 i_1,\, 0}^{1 i_1-1,\, 0} = \frac{\lambda}{2},$$

$$A_{1 i_1 0}^{2 i_1-1,\, 0} = A_{2 i_1 0}^{1 i_1+1,\, 0} = \frac{\mu}{2}.$$

Calculons enfin les coefficients $A_{\alpha i_1 i_2}^{\beta j_1 j_2}$ qui figurent dans les équations correspondant aux sommets inférieurs gauche et droit.

Pour le point (0, 0) on a

$$\begin{gathered}
A_{\alpha 00}^{\alpha 00} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_\beta}{h_\alpha}(2\mu+\lambda) + \frac{h_\alpha}{h_\beta}\mu\right), \quad \alpha \neq \beta, \\
A_{100}^{110} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \\
A_{100}^{101} = -\frac{h_1}{h_2}\frac{\mu}{2}, \quad A_{200}^{210} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\mu}{2}, \\
A_{200}^{201} = -\frac{h_1}{h_2}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \quad A_{\alpha 11}^{\alpha 11} = 0, \quad A_{\alpha 00}^{\beta 00} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\
A_{100}^{210} = A_{200}^{101} = \frac{\lambda}{2}, \quad A_{100}^{201} = A_{200}^{110} = \frac{\mu}{2}, \\
A_{\alpha 00}^{\beta 11} = -\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta.
\end{gathered} \tag{15}$$

Pour le point $(l_1, 0)$ on a

$$\begin{gathered}
A_{\alpha N_1 0}^{\alpha N_1 0} = \frac{h_\beta}{h_\alpha}\frac{\lambda+2\mu}{2} + \frac{h_\alpha}{h_\beta}\frac{\mu}{2}, \\
A_{1 N_1 0}^{1 N_1-1,\, 0} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \\
A_{1 N_1 0}^{1 N_1 1} = -\frac{h_1}{h_2}\mu, \\
A_{2 N_1 0}^{2 N_1-1,\, 0} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{\mu}{2}, \\
A_{2 N_1 0}^{2 N_1 1} = -\frac{h_1}{h_2}\frac{\lambda+2\mu}{2}, \\
A_{\alpha N_1 0}^{\beta N_1 0} = -\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \alpha \neq \beta, \\
A_{1 N_1 0}^{2 N_1-1,\, 0} = A_{2 N_1 0}^{1 N_1,\, 1} = \frac{\mu}{2}, \\
A_{1 N_1 0}^{2 N_1 1} = A_{2 N_1 0}^{1 N_1-1,\, 0} = \frac{\lambda}{2}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Portons maintenant (13) à (16) dans (11). Toutes transformations faites on obtient:

les approximations des équations

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1x_1}+\mu(y_1)_{\bar{x}_2x_2}+\frac{\lambda+\mu}{2}[(y_2)_{x_1x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]= \\
&\qquad\qquad =-\frac{1}{h_1h_2}\varphi_1,\ (x_1,\ x_2)\in\omega \\
&\frac{\lambda+\mu}{2}[(y_1)_{x_1x_2}+(y_1)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]+\mu(y_2)_{\bar{x}_1x_2}+(\lambda+2\mu)(y_2)_{\bar{x}_2x_2}= \\
&\qquad\qquad =-\frac{1}{h_1h_2}\varphi_2,\ (x_1,\ x_2)\in\omega,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

les approximations des conditions aux limites

$$
\begin{aligned}
&\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)^{\circ}_{x_1}]+\frac{h_2}{2}[(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1x_1}+(\lambda+\mu)(y_2)_{x_1x_2}]= \\
&\qquad\qquad =-\frac{\varphi_1}{h_1}, \\
&\lambda(y_1)_{x_1}+(\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2}+ \\
&\qquad +\frac{h_2}{2}[(\lambda+\mu)(y_1)_{x_1x_2}+\mu(y_2)_{\bar{x}_1x_1}]=-\frac{\varphi_2}{h_1}\ \text{ pour } x\in\bar{\omega}, \\
&\qquad\qquad x_2=0,\ x_1\neq 0,\ l_1,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

les approximations des conditions aux limites aux sommets

$$
\begin{aligned}
&\frac{h_2}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_1)_{x_1}+\lambda(y_2)_{x_2}]+ \\
&\quad +\frac{h_1}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}(\lambda+\mu)(y_2)_{x_1x_2}=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_1,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{h_1}{h_1+h_2}[\lambda(y_1)_{x_1}+(\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2}]+ \\
&\quad +\frac{h_2}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{x_1}]+\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}(\lambda+\mu)(y_1)_{x_1x_2}= \\
&\qquad\qquad =-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_2\ \text{ pour } x_1=x_2=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h_2}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_1)_{\bar{x}_1}+\lambda(y_2)_{x_2}]+ \\
&\qquad +\frac{h_1}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1}]=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi_1,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{h_1}{h_1+h_2}[(\lambda+2\mu)(y_2)_{x_2}+\lambda(y_1)_{\bar{x}_1}]- \\
&\qquad -\frac{h_2}{h_1+h_2}\mu[(y_1)_{x_2}+(y_2)_{\bar{x}_1}]=-\frac{2}{h_1+h_2}\varphi
\end{aligned}
$$

pour $x_1=l_1,\ x_2=0.$

Sur les autres parties de la frontière les équations s'écrivent comme (18), (19), (20).

Calculons l'erreur d'approximation des équations (17) à (20). Il est aisé de vérifier que les erreurs d'approximation des équations (17) sont

$$\psi_\alpha(x) = \left(\frac{1}{h_1 h_2}\varphi_\alpha - F_\alpha(x)\right) + O(h_1^2 + h_2^2), \qquad x \in \omega.$$

Mais (12) entraîne pour $x_i \in \omega$

$$\varphi_\alpha = \iint\limits_G \eta_i(x) F_\alpha(x)\, dx_1\, dx_2,$$

et

$$\iint\limits_G \eta_i(x)\, dx_1\, dx_2 = h_1 h_2, \quad \iint\limits_G \eta_i(x)\,(x_\alpha - x_\alpha^{(i_\alpha)})\, dx_1\, dx_2 = 0.$$

Donc pour $F_\alpha(x)$ suffisamment dérivables

$$\frac{1}{h_1 h_2}\varphi_\alpha - F_\alpha(x) = O(h_1^2 + h_2^2)$$

et

$$\psi_\alpha(x) = O(h_1^2 + h_2^2).$$

Pour l'équation (18) on a

$$\psi_\alpha(x_1, 0) = -f_\alpha(x, 0) - \frac{h_2}{2} F_\alpha(x_1, 0) + \frac{\varphi_\alpha}{h_1} + O(h_1^2 + h_2^2), \quad x_1 \neq 0,\ l_1.$$

Et en vertu de (12)

$$\varphi_\alpha(x, 0) = \iint\limits_G F_\alpha(x)\, \eta_{i10}(x)\, dx + \int\limits_0^{l_1} \eta_{i10}(x_1, 0)\, f_\alpha(x_1, 0)\, dx_1.$$

Comme

$$\iint\limits_G \eta_{i10}(x)\, dx = \frac{h_1 h_2}{2}, \quad \int\limits_0^{l_1} \eta_{i10}(x_1, 0)\, dx_1 = h_1,$$

$$\int\limits_0^{l_1} \eta_{i10}(x_1, 0)\,(x_1 - x_1^{(i_1)})\, dx_1 = 0,$$

pour $F_\alpha(x)$ et $f_\alpha(x_1, 0)$ suffisamment dérivables

$$\varphi_\alpha(x_1, 0) = \frac{h_1 h_2}{2} F_\alpha(x_1, 0) + h_1 f_\alpha(x_1, 0) + O(h_1(h_1^2 + h_2^2))$$

et

$$\psi_\alpha(x_1, 0) = O(h_1^2 + h_2^2), \qquad x \neq 0,\ l_1.$$

L'erreur d'approximation des équations (19) s'écrit

$$\psi_\alpha(0, 0) = -f_\alpha(0, 0) - \frac{h_1 h_2}{2(h_1+h_2)} F_\alpha(0, 0) + \frac{2}{h_1+h_2} \varphi_\alpha(0, 0) +$$
$$+ \frac{1}{2(h_1+h_2)} \left[h_1^2 \lambda \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + h_1 h_2 (\lambda+\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2^2 \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] u_\beta +$$
$$+ O(h_1^2 + h_2^2), \quad \alpha \neq \beta,$$

en outre en vertu de (12)

$$\varphi_\alpha(0, 0) = \iint_G \eta_{00}(x) F_\alpha(x)\, dx + \int_0^{l_1} \eta_{00}(x_1, 0) f_\alpha(x, 0)\, dx_1 +$$
$$+ \int_0^{l_2} \eta_{00}(0, x_2) f_\alpha(0, x_2)\, dx_2 = \frac{h_1+h_2}{2} f_\alpha(0, 0) + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Donc

$$\psi_\alpha(0, 0) = O(h_1 + h_2).$$

On montrerait de façon analogue que

$$\psi_\alpha(l_1, 0) = O(h_1 + h_2).$$

§ 5. Problèmes aux limites pour équations du quatrième ordre

Dans ce paragraphe on citera les principales équations différentielles du quatrième ordre que l'on rencontre en théorie de flexion des lames minces élastiques. On se servira de l'équation biharmonique pour formuler les conditions de conjugaison pour équations du quatrième ordre avec toute sorte de conditions aux limites. Les conditions de conjugaison et les conditions aux limites s'inspirent de l'exemple d'une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre.

1. Equations du quatrième ordre. Au § 1 du chapitre I on a montré que l'équilibre d'une lame mince homogène isotrope, sollicitée transversalement, pouvait être décrit dans le cas de petites flexions par l'équation approchée

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

où w est la flexion de la surface médiane de la lame, $D = Eh^3/12\,(1 - \nu^2)$, le coefficient de rigidité cylindrique de la lame, E, le module de Young, ν, le coefficient de Poisson, h, l'épaisseur de la lame, q, l'intensité de la charge transversale.

Si le coefficient de rigidité cylindrique D n'est pas constant, ce qui n'est pas exclu, dans le cas par exemple où l'épaisseur $h(x)$

est variable, l'équation d'équilibre s'écrit en vertu de (15) § 1 chap. I et (19) § 1 chap. I

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+$$
$$+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2} D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=q. \qquad (2)$$

Si la lame est anisotrope et possède, relativement à ses propriétés élastiques, trois plans de symétrie mutuellement orthogonaux, on dit qu'elle est orthotrope. Si l'on prend ces plans pour plans coordonnés, la loi de Hook s'écrit

$$\tau_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{11}+\nu_2\varepsilon_{22}),\quad \tau_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{22}+\nu_1 E_{11}),$$
$$\tau_{12}=G\varepsilon_{12},$$

où E_1 et E_2 sont les modules de Young, ν_1 et ν_2, les coefficients de Poisson ($E_1\nu_2=E_2\nu_1$), G, le module de cisaillement (dans le cas isotrope $G=E/2(1+\nu)$).

L'équation d'équilibre d'une lame homogène orthotrope est

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}=q, \qquad (3)$$

où

$$D_1=\frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},\quad D_2=\frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},$$
$$D_3=D_1\nu_2+2D_t,\quad D_t=Gh^3/12.$$

(D_1 et D_2 sont les coefficients de rigidité à la flexion, D_t, le coefficient de rigidité à la torsion).

Si en outre la lame orthotrope n'est pas homogène, l'équation d'équilibre prend la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right]+$$
$$+4\frac{\partial^4}{\partial x_1\,\partial x_2} D_t\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=q. \qquad (4)$$

On peut également écrire toute une série d'équations du quatrième ordre décrivant l'équilibre d'une lame mince dans le cas d'une anisotropie plus générale en tenant compte des forces agissant dans sa partie médiane et d'autres facteurs, mais cela dépasse le cadre de cet ouvrage.

2. Conditions de conjugaison d'une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre.

Avant de formuler les conditions de conjugaison pour les équations (1), (2), considérons l'équation (1) en dimension un. Il s'agit

de l'équation d'équilibre d'une tige homogène sous l'action d'une charge transversale

$$Bw^{\mathrm{IV}}(x) = q(x). \tag{5}$$

Ici $B = EJ$ est le coefficient de rigidité à la flexion, E, le module de Young, J, le moment d'inertie de la section de la tige, q, l'intensité de la charge extérieure. Il est d'usage de désigner par w la flexion, w', l'angle de rotation, Bw'', le moment de flexion, Bw''', la force de cisaillement. Considérons une tige de longueur l dont les abscisses des extrémités sont 0 et l. L'expression

$$W = \frac{B}{2} \int_0^l (w'')^2\, dx \tag{6}$$

est l'énergie de déformation élastique de la tige à la flexion. On vérifie sans peine que la résolution de l'équation (5) revient à trouver des fonctions $w(x)$ qui annulent la première variation de la fonctionnelle

$$I(w) = W - \int_0^l w(x)\, q(x)\, dx.$$

Considérons un système de deux tiges dont l'une est confondue avec l'intervalle $[-l, 0]$ de l'axe x et l'autre avec l'intervalle $[0, l]$. On supposera que le coefficient de rigidité de la tige gauche est égal à B^-, celui de la tige droite à B^+. Supposons que les deux tiges subissent l'action d'une charge extérieure, d'intensité $q(x)$. En vertu de (6) l'énergie de la tige gauche (resp. droite) vaut

$$W^- = \frac{B^-}{2} \int_{-l}^0 (w'')^2\, dx \quad \left(\text{resp. } W^+ = \frac{B^+}{2} \int_0^l (w'')^2\, dx\right).$$

Introduisons la fonctionnelle

$$I(w) = W^- + W^+ - \int_{-l}^l w(x)\, q(x)\, dx. \tag{7}$$

En annulant la variation première, on établit à quelles conditions de conjugaison doit satisfaire la fonction $w(x)$ pour $x = 0$. On a

$$\delta I = \frac{d}{dt} I(w + t\delta w)\big|_{t=0} =$$

$$= B^- \int_{-l}^0 w''\delta w''\, dx + B^+ \int_0^l w''\delta w''\, dx - \int_{-l}^l q\delta w\, dx.$$

En intégrant par parties et en supposant $\delta I = 0$, on trouve

$$B^- \int_{-l}^{0} w^{\mathrm{IV}} \delta w \, dx + B^+ \int_{0}^{l} w^{\mathrm{IV}} \delta w \, dx - \int_{-l}^{l} q \delta w \, dx +$$
$$+ B^- (w'' \delta w' - w''' \delta w) \big|_{-l}^{0} + B^+ (w'' \delta w' - w''' \delta w) \big|_{0}^{l} = 0.$$

La fonction δw étant arbitraire, pour $x = 0$ on aura

$$B^- (w'' \delta w' - w''' \delta w) \big|_{x=-0} - B^+ (w'' \delta w' - w''' \delta w) \big|_{x=+0} = 0. \tag{8}$$

Pour $x = 0$ les conditions de conjugaison dépendent du procédé d'assemblage des tiges en ce point. On supposera que les tiges sont assemblées de façon à avoir la même flexion en ce point, i.e.

$$w(-0) = w(+0). \tag{9}$$

Il est évident que cette condition doit être réalisée par la fonction δw, i.e. $\delta w(-0) = \delta w(+0)$.

Si l'on suppose maintenant que les tiges sont rigidement assemblées, i.e. qu'il y a coïncidence des flexions et des angles de rotation

$$w'(-0) = w'(+0), \tag{10}$$

l'équation (8) prend la forme

$$(B^+ w''' \big|_{x=+0} - B' w''' \big|_{x=-0}) \, \delta w(0) -$$
$$- (B^+ w''' \big|_{x=+0} - B^- w''' \big|_{x=-0}) \, \delta w'(0) = 0, \tag{11}$$

puisque dans ce cas la fonction $\delta w'$ est aussi continue.

Si l'on se sert de nouveau du fait que la fonction $\delta w(x)$ est arbitraire et que l'on suppose dans (11) d'abord que $\delta w'(0) = 0$ et ensuite que $\delta w(0) = 0$, on obtient

$$B^+ w'' \big|_{x=+0} = B^- w'' \big|_{x=-0}, \quad B^+ w''' \big|_{x=+0} = B^- w''' \big|_{x=-0}. \tag{12}$$

Supposons que

$$B = B(x) = \begin{cases} B^-, & x < 0 \\ B^+, & x > 0. \end{cases}$$

En se souvenant des notations

$$[v]_{x=0} = v(+0) - v(-0) = v_{\mathrm{d}} - v_{\mathrm{g}}$$

et en groupant (9), (10), (12), on obtient une collection complète de conditions de conjugaison au point d'assemblage rigide des deux tiges

$$[w] = [w'] = [Bw''] = [Bw'''] = 0, \quad x = 0. \tag{13}$$

Considérons les autres procédés d'assemblage des tiges au point $x = 0$. Supposons par exemple qu'en ce point elles sont assemblées par une articulation qui ne s'oppose pas à leur rotation mutuelle

(*articulation parfaite*). On peut alors supposer remplie la condition (10) et l'on pourra se dispenser de la continuité de la fonction $\delta w'$ au point $x = 0$. L'équation (8) s'écrit ici

$$(B^+ w'''|_{x=+0} - B^- w'''|_{x=-0})\,\delta w(0) - B^+ w''' \delta w'|_{x=+0} + \\ + B^- w'' \delta w'|_{x=-0} = 0. \qquad (14)$$

En se servant du fait que la fonction $\delta w(x)$ est arbitraire et en supposant dans (14) que sont successivement nulles $\delta w'(-0)$ et $\delta w'(+0)$, $\delta w'(-0)$ et $\delta w(0)$, $\delta w'(+0)$ et $\delta w(0)$, on obtient les conditions suivantes:

$$[Bw''']_{x=0} = 0, \quad B^+ w''|_{x=+0} = B^- w''|_{x=-0} = 0.$$

En ajoutant l'équation (9) à ces conditions on obtiendra une collection complète de *conditions de conjugaison au point d'assemblage des tiges par une articulation parfaite*

$$[w] = w''(-0) = w''(+0) = [Bw'''] = 0, \quad x = 0. \qquad (15)$$

Soit la fonctionnelle plus générale que (7)

$$I(w) = \frac{B^-}{2}\int_{-l}^{0} (w'')^2\,dx + \frac{B^+}{2}\int_{0}^{l} (w'')^2\,dx + \\ + \left(\frac{\alpha}{2}[w']^2 + \frac{\beta}{2}w^2\right)_{x=0} - \int_{-l}^{l} qw\,dx. \qquad (16)$$

Ici α et β sont des constantes non négatives, dont on précisera le sens ultérieurement. La présence de $\frac{\beta}{2}w^2(0)$ dans la fonctionnelle implique la continuité de $w(x)$ au point $x = 0$, et le terme $\frac{\alpha}{2}[w']^2 = \frac{\alpha}{2}\{w'(+0) - w'(-0)\}^2$ n'a de sens que si la fonction $w'(x)$ est discontinue pour $x = 0$.

Ecrivons la variation de la fonctionnelle (16) et transformons-la par une intégration par parties

$$\delta I = B^- \int_{-l}^{0} w^{\mathrm{IV}} \delta w\,dx + B^+ \int_{0}^{l} w^{\mathrm{IV}} \delta w\,dx - \\ - \int_{-l}^{l} q\delta w\,dx + B^-(w''\delta w' - w'''\delta w)\,]_{-l}^{0} + \\ + B^+(w''\delta w' - w'''\delta w)\,|_{0}^{l} + \alpha[w'][\delta w']|_{x=0} + \beta w\delta w|_{x=0}.$$

En annulant la variation et en se servant du fait que la fonction δw est arbitraire, on a pour $x = 0$:

$$\{[Bw'''] + \beta w\}\, \delta w\, |_{x=0} + \{-\alpha\, [w'] + Bw''\}\, \delta w'\, |_{x=-0} + \\ + \{\alpha\, [w'] - Bw''\}\, \delta w'\, |_{x=+0} = 0.$$

Le choix de δw étant arbitraire, en annulant successivement $\delta w'\,(-0)$, $\delta w'\,(+0)$, $\delta w\,(0)$ et $\delta w'\,(+0)$, $\delta w\,(0)$ et $\delta w'\,(-0)$, on obtient les conditions de conjugaison suivantes pour la fonction w:

$$[Bw'''] = -\beta w\, |_{x=-0},\ \alpha\, [w'] = Bw''\, |_{x=-0},\ \alpha\, [w'] = Bw''\, |_{x=+0}.$$

En soustrayant et en additionnant les deux dernières conditions, et en se souvenant que w est continue au point $x = 0$, on obtient une nouvelle collection de conditions de conjugaison

$$[w] = 0, \quad \alpha\, [w'] = Bw'', \quad [Bw''] = 0,\ [Bw'''] = -\beta w, \qquad (17)$$

pour $x = 0$.

Etudions la signification mécanique des paramètres α et β. Si l'on pose $\alpha = 0$, les trois premières conditions (17) coïncident avec les trois premières conditions (15); or ces dernières décrivent une articulation parfaite. En nous inspirant de cette analogie on appellera α le coefficient de rigidité de l'articulation. Lorsque $\alpha \to \infty$ la deuxième des conditions (17) se transforme en la condition $[w'] = 0$, donc les trois premières conditions se confondent avec les trois premières conditions (13). Mais les conditions (13) décrivent un assemblage rigide qu'il est naturel de considérer comme infiniment rigide, i.e. de coefficient de rigidité $\alpha = \infty$. C'est précisément ce que nous avons obtenu.

Lorsque $\beta \to \infty$ la dernière des conditions (17) s'écrit $w\,(0) = 0$. Mais cette condition signifie qu'au point $x = 0$ les tiges sont soutenues par un appui rigide, de sorte que β peut être appelé coefficient de rigidité d'appui.

Considérons maintenant tous les cas particuliers possibles des conditions (17).

1. $\alpha = \beta = 0$.

$$[w] = 0, \quad w''_g = w''_d = 0, \quad [Bw'''] = 0.$$

La condition $\alpha = 0$ signifie que l'articulation est parfaite et la condition $\beta = 0$ qu'il n'y a pas d'appui au point $x = 0$. Ces conditions coïncident avec les conditions (15). Ici $w_g = w\,(-0)$, $w_d = w\,(+0)$.

2. $\alpha = \text{const}$, $\beta = 0$.

$$[w] = 0, \quad \alpha\, [w'] = Bw'', \quad [Bw''] = [Bw'''] = 0.$$

Cette condition signifie que l'articulation est à rigidité finie.

3. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$.

La condition $\alpha = \infty$ signifie que la dérivée w' est continue au point $x = 0$ et donc que le terme correspondant ne figure pas dans l'expression (16). De là il résulte en particulier que dans (16) on peut remplacer les deux intégrales par une seule, prise entre $-l$ et l. Les conditions de conjugaison s'écrivent

$$[w] = [w'] = [Bw''] = [Bw'''] = 0.$$

Cette condition signifie que l'assemblage des tiges est absolument rigide et qu'on peut les considérer comme une seule tige. Ces conditions sont confondues avec les conditions (13).

4. $\alpha = 0$, $\beta = \text{const}$.

$$[w] = 0, \quad w''_g = w''_d = 0, \quad [Bw'''] = -\beta w.$$

Les trois premières conditions indiquent que l'articulation est parfaite et la quatrième condition que l'appui est élastique au point d'assemblage des tiges.

5. $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

$$[w] = 0, \ \alpha [w'] = Bw'', \ [Bw''] = 0, \ [Bw'''] = -\beta w.$$

Les trois premières conditions traduisent une rigidité finie de l'articulation, la quatrième un appui élastique.

6. $\alpha = \infty$, $\beta = \text{const}$.

$$[w] = [w'] = [Bw''] = 0, \quad [Bw'''] = -\beta w.$$

Les trois premières conditions montrent que l'assemblage des tiges est absolument rigide, i.e. il existe une seule tige, la quatrième que l'appui est élastique.

7. $\alpha = 0$, $\beta = \infty$.

$$w_g = w_d = w''_g = w''_d = 0.$$

La première et la troisième signifient que l'appui de la tige gauche est articulé au point $x = 0$, la seconde et la quatrième que l'appui de la tige droite est articulé. Dans ce cas les tiges sont indépendantes et peuvent être étudiées séparément.

8. $\alpha = \text{const}$, $\beta = \infty$.

$$w_g = w_d = 0, \quad \alpha [w'] = Bw'', \quad [Bw''] = 0.$$

Nous avons ici une articulation à rigidité finie soutenue par un appui absolument rigide.

9. $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$.

$$w_g = w_d = 0, \quad [w'] = [Bw''] = 0.$$

Au point $x = 0$ la tige est soutenue par un appui absolument rigide.

3. Conditions de conjugaison pour équations du quatrième ordre à dérivées partielles. Revenons maintenant à l'équation d'équilibre de la lame (2). Considérons une lame rectangulaire isotrope occupant dans le plan Ox_1x_2 le domaine $G_+ = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. On a vu au chapitre I que l'énergie de déformation élastique à la flexion s'exprimait par

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w \partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2. \tag{18}$$

Supposons que la lame est rigidement fixée par son bord $x_1 = 0$ à la tige qui la soutient, tige dont le coefficient de rigidité à la flexion est B^+ et à la torsion C^+. On sait que l'énergie de déformation élastique d'une tige à la flexion est

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_2} B^+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2 ; \tag{19}$$

et qu'on appelle énergie de déformation élastique d'une tige à la torsion la quantité

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_2} C^+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dx_2. \tag{20}$$

En ajoutant ces expressions à (18), on obtient l'expression de l'énergie de la lame soutenue par la tige

$$W^+ = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w \partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[B^+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + C^+ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2. \tag{21}$$

Considérons une autre lame couvrant le domaine

$$G_- = \{x = (x_1, x_2), \quad -l_1 \leqslant x_1 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2\}$$

et fixée par son bord $x_1 = 0$ à une tige de rigidité B^- et C^-. L'énergie de cette lame est

$$W^- = \frac{1}{2} \int_{-l_1}^{0} \int_0^{l_2} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w \partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[B^- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + C^- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2. \tag{22}$$

Assemblons ces deux lames par une articulation et supposons que l'énergie du système obtenu est

$$W = W^+ + W^- + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} \left\{ \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \right]^2 + \beta w^2 \right\}_{x_1=0} dx_2. \tag{23}$$

De même que dans l'expression de l'énergie pour un système de tiges, ici α est le coefficient de rigidité de l'articulation, β, le coefficient de rigidité de l'appui qui est susceptible d'exister sous l'articulation.

Ecrivons la fonctionnelle

$$I(w) = W - \int_{-l_1}^{l_1} \int_0^{l_2} q(x)\, w\, dx_1\, dx_2. \tag{24}$$

Trouvons sa variation première et annulons-la. En transformant l'expression obtenue au moyen d'intégration par parties et en introduisant les notations

$$M_1(x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$

$$Q_1(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) - 2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\, \partial x_2}, \tag{25}$$

on aura

$$\begin{aligned}
\delta I = \int_0^{l_2} \Big\{ & M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w\,|_{x_1=+0} - Q_1 \delta w\,|_{x_1=+0} - M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w\,|_{x_1=-0} + \\
& + Q_1 \delta w\,|_{x_1=-0} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B^+ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \delta w\,|_{x_1=+0} + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B^- \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \delta w\,|_{x_1=-0} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\, \partial x_2}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w\,|_{x_1=+0} - \\
& - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^- \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\, \partial x_2}\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w\,|_{x_1=-0} + \\
& + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0} - \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \delta w\,|_{x_1=+0} - \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w\,|_{x_1=-0} \right) + \beta w \delta w\,|_{x_1=0} \Big\}\, dx_2 + \ldots,
\end{aligned}$$

où les points représentent les membres ne se rapportant pas à l'articulation. De (23) il s'ensuit que la fonction $w(x)$ doit être continue pour $x_1 = 0$, par conséquent sa variation δw devra l'être également.

En annulant maintenant les coefficients de δw, $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w|_{x_1=+0}$ et $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w|_{x_1=-0}$, on obtient

$$[Q_1]|_{x_1=0}=\beta w+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{(B^++B^-)\frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2}\right\}\Big|_{x_1=0},$$

$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0}=-M_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0},$$

$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0}=-M_1-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)_{x_1=-0}.$$

Les conditions de conjugaison auront une forme plus symétrique si l'on remplace les deux dernières expressions par leur demi-somme et leur différence. En ajoutant la condition de continuité de w pour $x_1=0$, on aura $[w]=0$,

$$\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\frac{1}{2}\left\{D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big|_{x_1=+0}+D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\Big|_{x_1=-0}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{dx_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}\right\},\qquad(26)$$

$$\left[D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]=-\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=+0}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C^-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=-0}\right\},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]=$$
$$=-\beta w-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(B^++B^-)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$$

pour $x_1=0$.

Utilisons les notations (25) pour écrire sous une forme plus simplifiée les plus intéressants des cas particuliers des conditions (26).

1. $\alpha=\infty$, $\beta=B^\pm=C^\pm=0$.

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=[M_1]=[Q_1]=0 \text{ pour } x_1=0.$$

Ces conditions traduisent le fait que les lames sont rigidement assemblées. Ces conditions peuvent encore s'écrire

$$[w]=\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]=\left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]=0 \text{ pour } x_1=0.$$

2. $\alpha=\beta=0$, $B^+=B^-=B$, $C^+=C^-=C$.

$$[w]=M_1\mp\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\Big|_{x_1=\pm 0}=0,\quad [Q_1]=2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}.$$

Nous avons affaire ici à deux lames identiques assemblées par une articulation parfaite, et de plus les bords adjacents à l'articulation

sont fixés rigidement par des nervures qui travaillent à la flexion comme à la torsion.

3. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, $B^+ = B^- = B$, $C^+ = C^- = C$.

$$[w] = \left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right] = 0, \quad [M_1] = 2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right),$$

$$[Q_1] = -2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

Ces conditions correspondent à une seule lame fixée rigidement par une nervure.

4. $\alpha = \beta = C^- = C^+ = 0$, $B^+ = B^- = B$.

$$[w]|_{x_1=0} = M_1|_{x_1=\pm 0} = 0, \quad [Q_1] = 2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad \text{pour } x_1 = 0.$$

Ces conditions se distinguent des conditions 2 par le fait que les nervures ne travaillent pas à la torsion. Dans ce cas les lames peuvent être considérées non pas comme étant rigidement assemblées aux tiges les soutenant, mais comme s'appuyant sur elles.

5. $\alpha = \infty$, $\beta = C^- = C^+ = 0$, $B^+ = B^- = B$.

$$[w] = \left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right] = \left[D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right] = 0, \quad [Q_1] = 2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right).$$

La tige sert d'appui aux lames rigidement assemblées (une seule lame).

4. Conditions aux limites pour l'équation d'équilibre d'une tige. Ecrivons les conditions aux limites pour l'équation (5) au point $x = 0$. A l'expression (6) de l'énergie de la tige ajoutons les deux termes suivants

$$\frac{\alpha}{2}(w'(0))^2 \text{ et } \frac{\beta}{2}w^2(0),$$

et supposons qu'après fixation de la tige au point $x = 0$ son énergie se mette sous la forme

$$W = \frac{B}{2}\int_0^l (w'')^2\,dx + \frac{\alpha}{2}(w'(0))^2 + \frac{\beta}{2}w^2(0). \tag{27}$$

Ecrivons maintenant la fonctionnelle

$$I(w) = W - \int_0^l q(x)\,w(x)\,dx,$$

calculons sa variation première et annulons-la. En intégrant par parties l'expression obtenue, il vient

$$\delta I = B\int_0^l w^{\mathrm{IV}}\delta w\,dx + B(w''\delta w' - w'''\delta w)|_0^l + (\alpha w'\delta w' + \beta w\delta w)|_{x=0} = 0.$$

De là on déduit de façon classique les conditions aux limites

$$-Bw'' + \alpha w' = 0, \quad Bw''' + \beta w = 0. \tag{28}$$

Voyons les cas particuliers des conditions aux limites (28).

1. $\alpha = \beta = \infty$. La flexion et l'angle de rotation sont nuls. C'est la condition d'encastrement

$$w = w' = 0.$$

2. $\alpha = 0$, $\beta = \infty$. La flexion et le moment sont nuls. C'est la condition d'appui articulé

$$w = w'' = 0.$$

3. $\alpha = \beta = 0$. Le moment fléchissant et la force de cisaillement sont nuls. C'est la condition d'extrémité libre

$$w'' = w''' = 0.$$

4. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$. L'angle de rotation et la force de cisaillement sont nuls. C'est la condition de symétrie

$$w' = w''' = 0.$$

5. $\alpha = \text{const}$, $\beta = \infty$. La flexion est nulle, le moment proportionnel à l'angle de rotation. C'est la condition d'encastrement élastique

$$w = 0, \quad -Bw'' + \alpha w' = 0.$$

6. $\alpha = 0$, $\beta = \text{const}$. Le moment est nul, la force de cisaillement proportionnelle à la flexion. C'est la condition d'appui élastique

$$w'' = 0, \quad Bw''' + \beta w = 0.$$

Ces cas particuliers des conditions aux limites (28) nous suggèrent d'appeler α coefficient d'encastrement et β, coefficient de rigidité d'appui.

5. Conditions aux limites pour l'équation d'équilibre d'une lame isotrope. Revenons maintenant à l'équation d'équilibre de la lame isotrope (2), et établissons pour elle des conditions aux limites. Considérons une lame rectangulaire couvrant sur le plan Ox_1x_2 le domaine $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. On admettra que pour $x_1 = 0$ son bord est fixé par une nervure dont le coefficient de rigidité à la flexion est B et le coefficient de rigidité à la torsion C.

Ecrivons les conditions aux limites pour l'équation (2) pour $x_1 = 0$. L'énergie de la lame, si l'on ne tient pas compte de la nervure et du procédé de fixation du bord, s'exprime au moyen de (18), l'énergie de flexion et de torsion de la nervure par les expressions (19), (20) respectivement. Fixons d'une manière quelconque la lame

par son bord $x_1 = 0$ et convenons que son énergie est

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{D(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]\right\} dx_1\,dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^2 \left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\}_{x_1=0} dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \beta w^2\right\}_{x_1=0} dx_2. \quad (29)$$

Ecrivons maintenant la fonctionnelle

$$I(w) = W - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2,$$

calculons sa variation première et annulons-la. En faisant les transformations nécessaires et en ne calculant que les termes relatifs au bord $x_1 = 0$, on aura

$$\delta I = \int_0^{l_2}\left\{-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w + \left(\frac{\partial}{\partial x_1}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\delta w + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\delta w -$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w + \alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w + \beta w\delta w\right\}_{x_1=0} dx_2 + \ldots \quad (30)$$

En annulant successivement les coefficients en $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w$ et δw, on obtient les conditions aux limites cherchées

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(C\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2} =$$

$$= -\beta w - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (31)$$

pour $x_1 = 0$.

Ecrivons les plus importants cas particuliers des conditions (31).

1. $\alpha = \beta = \infty$. On reconnaît le cas d'une extrémité rigidement encastrée

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0. \quad (32)$$

2. $\alpha = C = 0$, $\beta = \infty$. Nous sommes placés dans le cas d'un appui articulé

$$w = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0. \tag{33}$$

ou

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0. \tag{34}$$

3. $\alpha = \beta = B = C = 0$. Le bord de la lame est libre

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \tag{35}$$

4. $\alpha = \infty$, $\beta = B = 0$. Les conditions (31) se transforment en les conditions de symétrie

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} = 0. \tag{36}$$

5. $\alpha = \beta = 0$. La lame possède un bord libre fixé par une nervure.

Attardons-nous encore un peu sur les conditions de concordance aux angles de la lame. Ecrivons à ces fins l'expression de l'énergie pour une lame rectangulaire fixée par une nervure aux bords $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ et raccordée de façon quelconque par ces bords. Affectons les paramètres relatifs au bord $x_1 = 0$ de l'indice -1 (exemple α_{-1}) et ceux relatifs au bord $x_2 = 0$ de l'indice -2 (exemple B_{-2}). L'énergie de la lame sera

$$W = \overset{\circ}{W} + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} \left\{ B_{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + C_{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \alpha_{-1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \beta_{-1} w^2 \right\}_{x_1=0} dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \left\{ B_{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + C_{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \alpha_{-2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 + \beta_{-2} w^2 \right\}_{x_2=0} dx_1,$$

où $\overset{\circ}{W}$ est définie par (8). Ecrivons comme d'habitude la fonctionnelle $I(w)$ et calculons sa variation première. Annulons les termes de l'expression de la variation qui se rapportent au point $x_1 = x_2 = 0$

$$2(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \delta w - B_{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta w + \frac{\partial}{\partial x_2} B_{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \delta w -$$

$$- C_{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w - B_{-2} \frac{\partial_2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta w +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_1} B_{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \delta w - C_{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta w = 0. \tag{37}$$

En annulant maintenant les coefficients en δw, $\frac{\partial}{\partial x_1}\delta w$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}\delta w$ on obtient les conditions de concordance pour $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{gathered} 2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0, \\ B_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+C_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=0, \quad C_{-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}+B_{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0. \end{gathered} \tag{38}$$

On pose ces conditions si seulement δw, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta w$ ne s'annulent pas. Si par exemple $\delta w = 0$ la première des conditions de concordance (38) n'a pas lieu. Pour $B_{-\alpha} = C_{-\alpha} = 0$, $\alpha = 1, 2$, on a une seule condition de concordance.

$$2(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}=0. \tag{39}$$

Remarque. Les conditions aux limites sont homogènes puisque nulle part nous n'avons tenu compte du travail des forces extérieures sur les lignes de fixation. Si l'on tient compte des forces en question les conditions seront non homogènes.

§ 6. Approximation des problèmes aux limites pour équations d'ordre quatre

Dans ce paragraphe on construira des approximations discrètes des équations d'équilibre, des conditions de conjugaison et des conditions aux limites étudiées au paragraphe précédent. On se servira de la méthode d'approximation de la fonctionnelle (cf. § 3 chapitre II).

1. Approximation des équations d'équilibre de la lame. Considérons la plus générale des équations d'équilibre du paragraphe précédent: l'équation (4) § 5 d'une lame orthotrope non homogène. On supposera que la lame est rectangulaire et qu'elle couvre le domaine $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha\}$ du plan Ox_1x_2. L'énergie de déformation élastique d'une lame orthotrope sollicitée par un effort transversal a pour expression

$$W(w)=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+\right.$$
$$\left.+(D_1\nu_2+D_2\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+4D_t\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\}dx_1\,dx_2 \tag{1}$$

Soit la fonctionnelle

$$I(w)=W(w)-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2. \tag{2}$$

Il est immédiat de vérifier que toute solution de l'équation (4) § 5 annule la variation première de la fonctionnelle $I(w)$.

Introduisons dans le domaine $\bar{G}$ le réseau régulier rectangulaire $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, où $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha = \bar{x}_\alpha^{(i_\alpha)} \mid, x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1 \ldots, \ldots, N_\alpha\}$, et approchons sur lui la fonctionnelle (2), (1). Puisque seule l'approximation de l'équation (4) § 5 nous intéresse, nous supposerons pour la simplicité que la lame est fixée par articulation sur son contour, i.e. vérifie les conditions aux limites (34) § 5.

Remplaçons les intégrales des trois premiers termes de (1) et du dernier terme de (2) par la formule des trapèzes, et l'intégrale du dernier terme de (1) par une combinaison linéaire des formules des rectangles. Compte tenu des conditions aux limites (34) § 5, il vient

$$W \sim \frac{1}{2}\sum_{\omega}\left\{D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + (D_1\nu_2 + D_2\nu_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} D_t\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \sum_{\omega_1^+\times\omega_2} D_t\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 +\right.$$

$$\left.+\sum_{+\omega_1\times\omega_2^+} D_t\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \sum_{+\omega_1\times\omega_2} D_t\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\right\},$$

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2.$$

Approchons maintenant les dérivées par des différences. Supposons que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} \sim w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$$

et approchons les dérivées mixtes de chaque somme de telle sorte que la sommation correspondante puisse être effectuée pour les fonctions définies sur $\bar{\omega}$. En portant les approximations en question dans (2), on obtient l'approximation suivante de la fonctionnelle $I(w)$:

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_{\omega} q(x)\,y(x)\,h_1h_2,$$

$$W_h(y) = \frac{1}{2}\sum_{\omega}\{D_1(y_{\bar{x}_1x_1})^2 + D_2(y_{\bar{x}_2x_2})^2 + (D_1\nu_2 + D_2\nu_1)\,y_{\bar{x}_1x_1}y_{\bar{x}_2x_2}\}\,h_1h_2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} D_t(y_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2 h_1h_2 + \sum_{\omega_1^+\times\omega^+_2} D_t(y_{\bar{x}_1x_2})^2 h_1h_2 +\right.$$

$$\left.+\sum_{+\omega_1\times\omega_2^+} D_t(y_{x_1\bar{x}_2})^2 h_1h_2 + \sum_{+\omega_1\times+\omega_2} D_t(y_{x_1x_2})^2 h_1h_2\right\}.$$

$I_h(y)$ est une fonction des variables $y(x)$ pour $x = x_i \in \omega$. En calculant ses dérivées premières, en les annulant aux points x pour $i_\alpha = 1, 3, \ldots, N_\alpha - 2$, on obtient les approximations de l'équation (4) § 5:

$$(D_1(y_{\bar{x}_1x_1} + \nu_2 y_{\bar{x}_2x_2}))_{\bar{x}_1x_1} + (D_2(y_{\bar{x}_2x_2} + \nu_1 y_{\bar{x}_1x_1}))_{\bar{x}_2x_2} +$$
$$+ (D_t y_{\bar{x}_1x_2})_{x_1x_2} + (D_t y_{\bar{x}_1x_2})_{x_1x_2} + (D_t y_{x_1\bar{x}_2})_{\bar{x}_1x_2} + (D_t y_{x_1x_2})_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = q. \quad (3)$$

Si la lame est homogène, l'équation prend la forme simple

$$D_1 y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1} + D_2 y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} + 2D_3 y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2} = q, \quad (4)$$

où

$$D_3 = D_1\nu + 2D_t.$$

Si de plus la lame est isotrope, $D_1 = D_2 = D_3 = D$, on obtient l'équation suivante

$$\Delta_h^2 y = y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1} + 2y_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2} + y_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} = q/D. \quad (5)$$

Il est aisé de vérifier que l'erreur d'approximation de l'équation (3) est $O(h_1^2 + h_2^2)$ sous réserve que les coefficients et la solution à approcher soient suffisamment dérivables.

2. Approximation des conditions de conjugaison pour une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre. Comme au pt. 2 § 5 considérons un système de deux tiges, dont la première à l'état non déformé couvre l'intervalle $[-l, 0]$ de l'axe Ox, la seconde, l'intervalle $[0, l]$ du même axe. Supposons que le coefficient de rigidité de la première tige est B^-, celui de la seconde B^+, et qu'elles sont toutes deux soumises à un effort transversal d'intensité $q(x)$. A l'équilibre la forme des tiges est décrite par l'équation (5) § 5 dans laquelle il importe de poser $B = B^-$ pour la première et $B = B^+$ pour la seconde. On supposera qu'au point d'assemblage des tiges, $x = 0$, la fonction de flexion des tiges $w(x)$ vérifie les conditions de conjugaison (17) § 5:

$$[w] = 0, \ \alpha[w'] = Bw'', \ [Bw''] = 0, \ [Bw'''] = -\beta w \text{ pour } x = 0. \quad (6)$$

Notre problème consiste à construire les approximations discrètes de ces conditions. Introduisons à ces fins sur l'intervalle $[-l, l]$ le réseau régulier $\bar{\omega} = \{x = x_i = ih \mid i = 0, \pm 1, \ldots, \pm N\}$ et approchons sur lui la fonctionnelle (16) § 5:

$$I(w) = \frac{B^-}{2}\int_{-l}^{0}(w'')^2\,dx + \frac{\beta^+}{2}\int_{0}^{l}(w'')^2\,dx +$$
$$+ \left(\frac{\alpha}{2}[w']^2 + \frac{\beta}{2}w^2\right)_{x=0} - \int_{-l}^{l} qw\,dx, \quad (7)$$

à partir de laquelle on a obtenu les conditions (1). Désignons par $\omega = \{x_i \mid i = 0, \pm 1, \ldots, \pm(N-1)\}$ l'ensemble des nœuds intérieurs du réseau $\bar{\omega}$, par $\omega_g = \{x_i \mid i = -1, -2, \ldots, -(N-1)\}$ l'ensemble des nœuds intérieurs du réseau sur l'intervalle $[-l, 0]$, par $\omega_d = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, N-1\}$ l'ensemble des nœuds intérieurs du réseau sur l'intervalle $[0, l]$. Puisque seule nous intéresse l'approximation des conditions de conjugaison, nous admettrons pour simplifier que les conditions d'appui articulé

$$w = w'' = 0$$

sont réalisées pour $x = \pm l$. On approchera les intégrales de (7) au moyen de la formule des trapèzes. En tenant compte des conditions aux limites, on aura

$$\int_{-l}^{l} qw\,dx \sim \sum_{\omega} q(x)\,w(x)\,h,$$

$$\int_{-l}^{0} (w'')^2\,dx \sim \sum_{\omega_g} (w'')^2 h + (w''_g)^2 \frac{h}{2},$$

$$\int_{0}^{l} (w'')^2\,dx \sim \sum_{\omega_d} (w'')^2 h + (w''_d)^2 \frac{h}{2},$$

où

$$w''_g = w''(-0), \quad w''_d = w''(+0).$$

En portant ces approximations dans (7), on obtient

$$I(w) \sim \frac{1}{2}\left\{ B^- \sum_{\omega_g} (w'')^2 h + B^+ \sum_{\omega_d} (w'')^2 h - 2 \sum_{\omega} q(x)\,w(x)\,h \right\} + I_0 + \frac{\beta}{2} w^2(0), \tag{8}$$

où

$$I_0 = \frac{1}{2}\left\{ \frac{hB^-}{2} (w''_g)^2 + \frac{hB^+}{2} (w''_d)^2 + \alpha [w']^2 \Big|_{x=0} \right\}. \tag{9}$$

Remplaçons w'' par les différences secondes

$$w'' \sim w_{\bar{x}x}, \quad x \in \omega_g, \ \omega_d,$$

et étudions spécialement le procédé d'approximation des dérivées au point $x = 0$.

Traitons d'abord le cas où α est fini et non nul. En vertu de (6)

$$B^- (w''_g)^2 + B^+ (w''_g)^2 = \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right) (B^- w''_g)^2 = \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right) \alpha^2 [w']^2 \Big|_{x=0}.$$

En portant cette expression dans (9), on obtient

$$I_0 = \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{h\alpha}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}[w']^2. \tag{10}$$

Ecrivons l'approximation la plus simple du saut de la dérivée et étudions son erreur

$$(w_x - w_{\bar{x}})|_{x=0} = [w']|_{x=0} + \frac{h}{2}(w''_{\text{d}} + w''_{\text{g}}) + O(h^2).$$

En se servant de la deuxième et la troisième conditions (6) on aura

$$(w_x - w_{\bar{x}})|_{x=0} = \left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}[w']|_{x=0} + O(h^2)$$

ou

$$[w']|_{x=0} = \left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x - w_{\bar{x}})|_{x=0} + O(h^2).$$

En portant dans (10), on obtient

$$I_0 = \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)[w']^2\right\}\Big|_{x=0} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x - w_{\bar{x}})^2 + O(h^2).$$

En négligeant la quantité $O(h^2)$, on obtient l'approximation de l'expression (10)

$$I_0 \sim \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(w_x - w_{\bar{x}}) \tag{11}$$

Voyons maintenant les cas limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \infty$. Si $\alpha = 0$, en vertu de (6)

$$w''_{\text{g}} = w''_{\text{d}} = 0,$$

donc I_0 est nul. En posant formellement $\alpha = 0$ dans (11), on obtient l'approximation $I_0 \sim 0$. Si $\alpha = \infty$, en vertu de (6) $[w']_{x=0} = 0$ et l'expression (9) s'écrit

$$I_0 = \frac{h}{4}\{B^+(w''_{\text{d}})^2 + B^-(w''_{\text{g}})^2\}. \tag{12}$$

Dans (11), si $\alpha \to \infty$, on obtient

$$I_0 \sim \frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(w_x - w_{\bar{x}})^2.$$

En développant en série de Taylor, on obtient

$$\frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(w_x - w_{\bar{x}})^2 = \frac{hB^+B^-}{4(B^+ + B^-)}(w''_{\text{d}} + w''_{\text{g}})^2 + O(h^3). \tag{13}$$

En vertu de la troisième condition (6) $B^+w''_{\text{d}} = (B^-w''_{\text{g}}$, donc

$$B^+B^-(w''_{\text{d}} + w''_{\text{g}})^2 = B^+B^-(w''_{\text{d}})^2 + B^+B^-(w''_{\text{g}})^2 + (B^+w_{\text{d}})^2 +$$

$$+ (B^-w''_{\text{g}})^2 = (B^+ + B^-)\{B^+(w''_{\text{d}})^2 + B^-(w''_{\text{g}})^2\}.$$

En portant cette expression dans (13), il vient

$$\frac{B^+B^-}{h(B^++B^-)}(w_x-w_{\bar{x}})^2=\frac{h}{4}\{B^+(w''_{\mathrm{d}})^2+B^-(w''_{\mathrm{g}})^2\}+O(h^3).$$

En comparant avec (12), on s'aperçoit que pour $\alpha=\infty$ l'approximation (11) admet l'erreur $O(h^3)$.

En portant maintenant toutes les approximations dans (8) on obtient l'approximation discrète de la fonctionnelle (7):

$$I_h(y)=\frac{1}{2}\left\{B^-\sum_{\omega_{\mathrm{g}}}(y_{\bar{x}x})^2h+\sum_{\omega_{\mathrm{d}}}(y_{\bar{x}x})^2h-2\sum_{\omega}qyh\right\}+$$
$$+\frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_x-y_{\bar{x}})^2+\frac{\beta}{2}y^2(0). \qquad (14)$$

Transformons dans (14) les termes qui se rapportent au point $x=0$:

$$\frac{\alpha}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_x-y_{\bar{x}})^2=$$
$$=\frac{\alpha h^2}{2}\left\{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1}(y_{\bar{x}x})^2=$$
$$=h\frac{B^-B^+}{B^-+B^+}\left\{1-\frac{1}{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)}\right\}(y_{\bar{x}x})^2.$$

Soit

$$B=\begin{cases}B^-, & x\in\omega_{\mathrm{g}},\\ B^+, & x\in\omega_{\mathrm{d}},\\ \dfrac{2B^-B^+}{B^-+B^+}\left\{1-\dfrac{1}{1+\frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-}+\frac{1}{B^+}\right)}\right\}, & x=0.\end{cases}$$

(14) s'écrit alors

$$I_h(y)=\frac{1}{2}\sum_{\omega}\widetilde{B}(x)(y_{\bar{x}x})^2+\frac{\beta}{2}y^2(0)-\sum_{\omega}q(x)y(x)h. \qquad (15)$$

L'approximation de la fonctionnelle (7) est achevée. $I_h(y)$ est une fonction des variables $y(x)$, $x\in\omega$. En la dérivant par rapport à $y(x)$ et en annulant les dérivées premières, on obtient les équations suivantes en x_i pour $i=0,\pm1,\ldots,\pm(N-2)$:

$$(\widetilde{B}y_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}-\beta\delta(x)y=q(x), \qquad (16)$$

où $\delta(x)$ est l'analogue discret de la fonction delta.

Pour $x = \pm 2h, \pm 3h, \ldots, \pm (1-2h)$, à partir de (16) on obtient l'approximation ordinaire de l'équation (5) § 5

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \frac{q(x)}{B^{\pm}},$$

et pour $x = 0, \pm h$ l'approximation des conditions de conjugaison (6). Examinons ces équations. On supposera pour la simplicité $B^- = B^+ = B$. En transformant (16) pour $x = 0, \pm h$, on obtient les équations suivantes

$$B\left(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}x}(0) - \frac{1}{h(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}\bar{x}x}(0) - \frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}\bar{x}}(0)\right) = q(-h),$$

$$B\left(y_{\bar{x}x\bar{x}x}(0) + \frac{2}{h^2(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}x}(0) + \frac{\beta}{h} y(0) = q(0), \right. \tag{17}$$

$$B\left(y_{\bar{x}xxx}(0) + \frac{1}{h(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}xx}(0) - \frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)} y_{xx}(0)\right) = q(h).$$

Montrons que les équations (17) approchent effectivement les conditions de conjugaison (6). Pour cela écrivons tout d'abord les conditions (17) sous la forme suivante:

$$B\left(\frac{y_{\bar{x}xx} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}x}}{h} - \frac{1}{h(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}\bar{x}x} - \frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}\bar{x}}\right) = q(-h),$$

$$B\left(\frac{y_{x\bar{x}\bar{x}} - y_{x\bar{x}\bar{x}}}{h} + \frac{2}{h^2(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}x}\right) + \frac{\beta}{h} y = q(0), \tag{18}$$

$$B\left(\frac{y_{xxx} - y_{xxx}}{h} + \frac{1}{h(1+\alpha h/B)} y_{xxx} - \frac{1}{h^2(1+\alpha h/B)} y_{xx}\right) = q(h).$$

Sauf mention du contraire, l'argument est nul partout ici. Ajoutons les expressions obtenues et multiplions cette somme par h.

Toutes réductions faites, on obtient l'approximation de la dernière des conditions (6)

$$B(y_{xxx} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) = -\beta y + 3hq(0) + h^3 q_{\bar{x}x}. \tag{19}$$

Mettons la première et la troisième des équations (18) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}x} - B\left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{y} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right) = q(-h), \\ &B\left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx}\right) + \frac{\alpha}{h(1+\alpha h/B)} y_{\bar{x}x} = q(h). \end{aligned} \tag{20}$$

Otons la deuxième équation (20) de la première et multiplions cette différence par h^2:

$$B(y_{xx} - y_{\bar{x}\bar{x}}) = hB(y_{xxx} + y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) - h^2(q(h) - q(-h)). \tag{21}$$

On reconnaît ici l'approximation de la troisième des conditions (6).

Récrivons enfin l'équation (20) sous la forme

$$\frac{\alpha}{h^2(1+\alpha h/B)}(y_x - y_{\bar{x}}) - B\left(\frac{1}{h^2}y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h}y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right) = q(-h).$$

$$B\left(\frac{1}{h}y_{xxx} - \frac{1}{h}y_{xx}\right) + \frac{\alpha}{h^2(1+\alpha h/B)}(y_x - y_{\bar{x}}) = q(h).$$

En ajoutant ces expressions et en multipliant leur somme par $h^2/2$ on obtient l'approximation de la deuxième des conditions (6):

$$\frac{\alpha}{1+\alpha h/B}(y_x - y_{\bar{x}}) = \frac{B}{2}(y_{xx} + y_{\bar{x}\bar{x}}) - \\ - \frac{Bh}{2}(y_{xxx} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) + h^2 q + \frac{h^4}{2}q_{\bar{x}x}. \qquad (22)$$

On vérifie immédiatement que les expressions (19), (21), (22) approchent les conditions (6) avec une erreur d'au moins $O(h^2)$.

3. Approximation des conditions de conjugaison pour équations du quatrième ordre à dérivées partielles. Construisons l'approximation des conditions de conjugaison (26) § 5 pour l'équation (1) § 5. Pour simplifier les calculs on supposera que $C^+ = C^- = 0$, $B^+ = B^- = \frac{B}{2}$ dans les conditions de conjugaison, et que $D_g = D_d$ dans l'équation (1), où comme précédemment $v_g = v(-0, x_2)$, $v_d = v(+0, x_2)$. Sous ces hypothèses les conditions (26) § 5 deviennent

$$[w] = 0, \quad \alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right] = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right),$$

$$D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right] = 0, \qquad (23)$$

$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right] = -\beta w - B\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}, \quad x_1 = 0.$$

On se servira de nouveau de la méthode d'approximation de la fonctionnelle pour construire les analogues discrets des conditions (23). Pour cela adressons-nous à la fonctionnelle (24) § 5, (23) § 5 d'où l'on a déduit les conditions (26) § 5 et récrivons-la, compte tenu des hypothèses faites, sous la forme suivante:

$$I(w) = W - \int_{-l_1}^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\, w\, dx_1\, dx_2, \qquad (24)$$

où

$$W = W^+ + W^- + \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2 + \beta w^2 + B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2}\right)\right\}_{x_1=0} dx_2, \qquad (25)$$

et

$$W^+ = \frac{D}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\} dx_1\,dx_2, \qquad (26)$$

$$W^- = \frac{D}{2}\int_{-l_1}^{0}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\} dx_1\,dx_2. \qquad (27)$$

Considérons dans le domaine $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) \mid -l_1 \leqslant x_1 \leqslant l_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2\}$ le réseau régulier rectangulaire $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$ où $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ sont des réseaux sur les intervalles $[-l_1, l_1]$ et $[0, l_2]$ respectivement et de plus $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{1,g} \cup \bar{\omega}_{1,d}$ et

$$\omega_{1,g} = \{x_1 \mid x_1 = i_1 h_1,\ i_1 = 0, -1, \ldots, -N_1\},$$
$$\bar{\omega}_{1,d} = \{x_1 \mid x_1 = i_1 h_1,\ i_1 = 0, 1, \ldots, N_1\}.$$

Supposons que ω_α est l'ensemble des nœuds intérieurs du réseau $\bar{\omega}_\alpha$ et $\omega_{1,g}$ ($\omega_{1,d}$) celui des nœuds intérieurs du réseau $\bar{\omega}_{1,g}$ ($\bar{\omega}_{1,d}$).

Notons

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2,\ \omega_g = \omega_{1,g} \times \omega_2,\ \omega_d = \omega_{1,d} \times \omega_2,$$
$$\mathring{\gamma} = \omega \setminus \{\omega_g \cup \omega_d\}.$$

Supposons par ailleurs que

$$\omega_{1,g}^+ = \omega_1 \setminus \omega_{1,d},\ \omega_{1,d}^+ = \bar{\omega}_1 \setminus \bar{\omega}_{1,g},\ {}^+\omega_{1,g} = \bar{\omega}_1 \setminus \bar{\omega}_{1,d},$$
$$\omega_{1,d} = \omega_1 \setminus \omega_{1,g}.$$

Comme pour l'instant seule l'approximation des conditions (23) nous intéresse, nous supposerons pour simplifier que la fonction $w(x)$ vérifie les conditions (34) § 5 sur la frontière du domaine G, i.e.

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0.$$

Approchons les intégrales de (24) à (27) par leurs formules de sommation. On se servira de la formule des trapèzes pour l'intégrale du dernier terme de (24) et les intégrales des trois premiers termes de (26), (27); et des combinaisons linéaires des formules des rectangles pour la dernière intégrale de (26), (27).

En tenant compte des conditions aux limites pour la fonction $w(x)$, on peut poser

$$\int_{-l_1}^{l_1}\int_{0}^{l_2} qw\,dx_1\,dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2,$$

$$W^-(w) \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega_g}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2+$$

$$+\frac{(1-\nu)D}{4}\left\{\sum_{\omega_{1,\,g}^{+}\times\omega_2^{+}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\sum_{{}^{+}\omega_{1,\,g}\times\omega_2^{+}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\right.$$

$$\left.+\sum_{\omega_{1,\,g}^{+}\times{}^{+}\omega_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\sum_{{}^{+}\omega_{1,\,g}\times{}^{+}\omega_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\right\}+$$

$$+\frac{D}{2}\sum_{\overset{\circ}{\gamma}}\frac{h_1h_2}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\},$$

$$W^+(w) \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega_d}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}h_1h_2+$$

$$+\frac{(1-\nu)D}{4}\left\{\sum_{\omega_{1,\,d}^{+}\times\omega_2^{+}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\sum_{{}^{+}\omega_{1,\,d}\times\omega_2^{+}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\right.$$

$$\left.+\sum_{\omega_{1,\,d}^{+}\times{}^{+}\omega_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2+\sum_{{}^{+}\omega_{1,\,d}\times{}^{+}\omega_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2 h_1h_2\right\}+$$

$$+\frac{D}{2}\sum_{\overset{\circ}{\gamma}}\frac{h_1h_2}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}.$$

Supposons par ailleurs que

$$\frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2+\beta w^2\right\}dx_2\sim$$

$$\sim\frac{1}{2}\sum_{\overset{\circ}{\gamma}}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\alpha\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]^2+\beta w^2\right]\right\}h_2.$$

Remplaçons les dérivées secondes figurant dans les formules de sommations sur ω_g et ω_d par les expressions aux différences secondes

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}\sim w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Ecrivons séparément les dérivées mixtes de chaque somme. Sup-

posons que

$$W_{\bar h}^{-}(y)=\frac{D}{2}\sum_{\omega_g}\{(y_{\bar x_1x_1})^2+(y_{\bar x_2x_2})^2+2\nu y_{\bar x_1x_1}y_{\bar x_2x_2}\}h_1h_2+$$

$$+\frac{D(1-\nu)}{4}\Big\{\sum_{\omega_{1,g}^{+}\times\omega_2^{+}}(y_{\bar x_1\bar x_2})^2h_1h_2+\sum_{{}^{+}\omega_{1,g}\times\omega_2^{+}}(y_{x_1\bar x_2})^2h_1h_2+$$

$$+\sum_{\omega_{1,g}^{+}\times{}^{+}\omega_2}(y_{\bar x_1x_2})^2h_1h_2+\sum_{{}^{+}\omega_{1,g}\times{}^{+}\omega_2}(y_{x_1x_2})^2h_1h_2\Big\},\qquad(28)$$

$$W_{h}^{+}(y)=\frac{D}{2}\sum_{\omega_d}\{(y_{\bar x_1x_1})^2+(y_{\bar x_2x_2})^2+2\nu y_{\bar x_1x_1}y_{\bar x_2x_2}\}h_1h_2+$$

$$+\frac{D(1-\nu)}{4}\Big\{\sum_{\omega_{1,d}^{+}\times\omega_2^{+}}(y_{\bar x_1\bar x_2})^2h_1h_2+\sum_{{}^{+}\omega_{1,d}\times\omega_2^{+}}(y_{x_1\bar x_2})^2h_1h_2+$$

$$+\sum_{\omega_{1,d}^{+}\times{}^{+}\omega_2}(y_{\bar x_1x_2})^2h_1h_2+\sum_{{}^{+}\omega_{1,d}\times{}^{+}\omega_2}(y_{x_1x_2})^2h_1h_2\Big\}.\qquad(29)$$

Il nous reste à approcher les dérivées dans la somme $\sum_{\overset{\circ}{\gamma}}A(w)\,h_2$, où

$$A(w)=\frac{Dh_1}{4}\Big\{\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}\Big)_g^2+\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\Big)^2+2\nu\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}\Big)_g\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}+$$

$$+\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}\Big)_d^2+\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\Big)^2+2\nu\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}\Big)_d\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{\alpha\Big[\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big]^2+B\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_2}\Big)^2+\beta w^2\Big\}.\qquad(30)$$

Supposons que α est fini et non nul. On déduit alors de (23)

$$\frac{D}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\Big)_g^2+\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\Big)_d^2\Big\}=\frac{\alpha^2}{D}\Big[\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big]^2.$$

En portant cette expression dans (30), on aura

$$A(w)=\frac{\alpha}{2}\Big(1+\frac{\alpha h_1}{D}\Big)\Big[\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\{B+h_1D(1-\nu^2)\}\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_2}\Big)^2+\frac{\beta}{2}w^2.\qquad(31)$$

Ecrivons l'approximation la plus simple du saut de la dérivée $[\partial w/\partial x_1]_{x_1=0}$ et étudions son erreur

$$(w_{x_1}-w_{\bar x_1})|_{x_1=0}=\Big[\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big]\Big|_{x_1=0}+\frac{h_1}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}\Big)_d+\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}\Big)_g\Big\}+O(h_1^2)=$$

$$=\Big[\frac{\partial w}{\partial x_1}\Big]\Big|_{x_1=0}+\frac{h_1}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\Big)_d+\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\Big)_g\Big\}-$$

$$-h_1\nu\frac{\partial^2w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0}+O(h^2).$$

De (23) il vient

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{d}}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)_{\text{g}}=\frac{2\alpha}{D}\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0},$$

donc

$$(w_{x_1}-w_{\bar{x}_1})\,|_{x_1=0}=\left(1+\frac{\alpha h_1}{D}\right)\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]_{x_1=0}-h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0}+O(h_1^2).$$

Et

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\Big|_{x_1=0}=\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\left\{(w_{x_1}-w_{\bar{x}_1})\,|_{x_1=0}+h_1\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{x_1=0}+O(h_1^2)\right\}.$$

En portant cotte expression dans (31) et en remplaçant $\partial^2 w/\partial x_2^2$ par l'expression aux différences seconde on obtient

$$A(w)=\frac{\alpha}{2}\frac{1}{1+\alpha h_1/D}\{(w_{x_1}-w_{\bar{x}_1})+h_1\nu w_{\bar{x}_2x_2}+O(h_1^2+h_2^2)\}^2+$$
$$+\frac{1}{2}\{B+h_1D(1-\nu^2)\}(w_{\bar{x}_2x_2})^2+\frac{\beta}{2}w^2+O(h_2^2). \qquad (32)$$

Traitons les cas limites $\alpha=0$ et $\alpha=\infty$. En posant $\alpha=0$ dans (30) et en tenant compte de (23) on trouve

$$A(w)=\frac{1}{2}\{B+h_1D(1-\nu^2)\}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\frac{\beta}{2}w^2.$$

Mais les termes principaux de (32) approchent précisément cette expression avec une erreur de $O(h_2^2)$ pour $\alpha=0$. Faisons maintenant tendre α vers ∞ dans (30). En tenant compte de (23) on établit de nouveau que

$$A(w)=\frac{Dh_1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\left(B+\frac{Dh_1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2}\right)^2+\beta w^2\right\}.$$

Lorsque $\alpha\to\infty$, l'expression (32) devient

$$A(w)=\frac{Dh_1}{2}\{w_{\bar{x}_1x_1}+\nu w_{\bar{x}_2x_2}+O(h_1+h_2^2/h_1)\}^2+$$
$$+\frac{1}{2}\{B+h_1D(1-\nu^2)\}(w_{\bar{x}_2x_2})^2+\frac{\beta}{2}w^2+O(h_2^2),$$

donc ses termes principaux approchent (30) avec une erreur de $O(h_1^2+$ $+h_2^2)$.

Donc

$$W_h^0(y)=\frac{1}{2}\sum_{\mathring{\gamma}}h_2\left\{\frac{\alpha}{1+\alpha h_1/D}(y_{x_1}-y_{\bar{x}_1})^2+\right.$$
$$\left.+\left[B+h_1D\left(1-\frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D}\right)\right](y_{x_2x_2})^2+\frac{2h_1\alpha\nu}{1+\alpha h_1/D}(w_{x_1}-w_{x_1})\,w_{x_2x_2}\right\}. \qquad (33)$$

L'approximation discrète de la fonctionnelle $I(w)$ de (24) s'écrira

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_{\omega} qyh_1h_2, \tag{34}$$

où

$$W_h(y) = W_h^-(y) + W_h^+(y) + W_h^0(y),$$

et $W_h^-(y)$, $W_h^+(y)$ et $W_h^0(y)$ sont définis par les expressions (28), (29), (33).

Transformons $W_h^0(y)$. En remarquant que

$$(y_{x_1} - y_{\bar{x}_1})^2 = h_1^2 (y_{\bar{x}_1 x_1})^2, \quad \frac{\alpha h_1}{1 + \alpha h_1/D} = D\left(1 - \frac{1}{1 + \alpha h_1/D}\right),$$

on obtient pour

$$W_h^0(y) = \frac{h_1}{2} \sum_{\mathring{\gamma}} h_2 D \left\{ \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha h_1/D}\right) (y_{\bar{x}_1 x_1})^2 + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{\nu^2}{1 + \alpha h_1/D} + \frac{B}{Dh_1}\right) (y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + 2\left(1 - \frac{1}{1 + \alpha h_1/D}\right) \nu y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} \right\}.$$

Comparons les expressions figurant sous le signe somme dans $W_h^0(y)$ et sous le signe somme sur $\omega_{g(d)}$ dans $W_h^{\pm}(y)$; elles ne diffèrent que par les coefficients en les différences.

Notons

$$\begin{aligned} D_1 &= D\left(1 - \frac{h_1}{1 + \alpha h_1/D}\,\delta(x_1)\right), \\ D_2 &= D\left(1 - \left(\frac{\nu^2 h_1}{1 + \alpha h_1/D} - \frac{B}{D}\right)\delta(x_1)\right), \quad D_t = D\,\frac{1 - \nu}{2}, \end{aligned} \tag{35}$$

où $\delta(x_1)$ est l'analogue discret de la fonction delta.

$$\delta(x_1) = \begin{cases} h_1^{-1}, & x_1 = 0, \\ 0, & x_1 \in \omega_1,\ x_1 \neq 0. \end{cases}$$

Dans les nouvelles notations $W_h(y)$ s'écrit

$$W_h(y) = \frac{1}{2} \sum_{\omega} h_1 h_2 \{D_1 (y_{\bar{x}_1 x_1})^2 + D_2 (y_{\bar{x}_2 x_2})^2 + 2D_1 \nu y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2}\} +$$

$$+ \frac{D_t}{2} \left\{ \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})^2 + \sum_{+\omega_1 \times \omega_2^+} h_1 h_2 (y_{x_1 \bar{x}_2})^2 + \sum_{\omega_1^+ \times +\omega_2} h_1 h_2 (y_{\bar{x}_1 x_2})^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{+\omega_1 \times +\omega_2} h_1 h_2 (y_{x_1 x_2})^2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\omega} h_1 h_2 \beta \delta(x_1)\, y^2. \tag{36}$$

Dans (34), $I_h(y)$ est une fonction des variables $y(x)$ pour $x \in \omega$. En la dérivant par rapport à $y(x)$ pour $x_1 \neq \pm(l_1 - h_1)$, $x_2 \neq h_2$,

$l_2 - h_2$ et en annulant cette dérivée, on obtient les équations suivantes :

$$(D_1 y_{\bar{x}_1 x_1})_{\bar{x}_1 x_1} + (D_2 y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_2 x_2} + (D_1 \nu y_{\bar{x}_1 x_1})_{\bar{x}_2 x_2} + \\ + (D_1 \nu y_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_1 x_1} + 4D_1 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + \beta\delta(x_1)\, y = q(x), \\ x_1 \neq \pm(l_1 - h_1), \quad x_2 \neq h_2, \quad l_2 - h_2. \tag{37}$$

En posant dans (37) $x_1 = 0, \pm h_1$, on obtient les approximations discrètes des conditions de conjugaison (23). Moyennant quelques transformations ces équations s'écrivent :

$$D\Big\{ y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} - \frac{1}{h_1(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1 x_1 x_1} - \frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1 x_1} + \\ + y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + 2y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} - \frac{\nu}{h_1(1+\alpha h_1/D)} y_{x_1 \bar{x}_2 x_2} - \\ - \frac{\nu}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_2 x_2} \Big\} = q, \\ x = (-h_1, x_2),$$

$$D\Big\{ y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + \frac{2}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1 x_1} + \\ + \Big(1 - \frac{\nu^2}{1+\alpha h_1/D} + \frac{B}{Dh_1}\Big) y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + \Big(2 - \frac{1}{1+\alpha h_1/D}\Big) y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + \\ + \frac{2\nu y_{\bar{x}_2 x_2}}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} + \frac{B}{h_1} y \Big\} = q, \qquad x = (0, x_2)$$

$$D\Big\{ y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + \frac{1}{h_1(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1 x_1} - \frac{1}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1 x_1} + \\ + y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + 2y_{x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{\nu}{h_1(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2} - \\ - \frac{\nu}{h_1^2(1+\alpha h_1/D)} y_{\bar{x}_2 x_2} \Big\} = q, \qquad x = (h_1, x_2).$$

Comme dans les cas des équations (18), ces équations peuvent être ramenées à une forme d'où il résultera qu'elles approchent les conditions (23) avec une erreur de $O(h_1^2 + h_2^2)$.

4. Approximation des conditions aux limites pour une équation différentielle ordinaire d'ordre quatre. On approchera les conditions aux limites (28) § 5 pour l'équation (5) § 5, mais au lieu de conditions homogènes on considérera les conditions non homogènes :

$$-Bw'' + \alpha(w' - w_0') = M_0, \; Bw''' + \beta(w - w_0) = Q_0, \; x_0 = 0, \tag{38}$$

où w_0, w_0', M_0, et Q_0 sont des constantes données ; (les quantités w_0 et w_0' ont été introduites pour la commodité).

Supposons que l'équation (5) § 5 est étudiée sur l'intervalle $[0, l]$, que pour $x = l$ sa solution vérifie les conditions $w(l) = w''(l) = 0$ et pour $x = 0$ les conditions (38). Soit la fonctionnelle

$$I(w) = W(w) - \int_0^l qw dx - Q(\beta) w(0) - M(\alpha) w'(0), \tag{39}$$

où

$$W(w) = \frac{B}{2} \int_0^l (w'')^2 dx + \frac{\alpha}{2} (w'(0))^2 + \frac{\beta}{2} w^2(0) \tag{40}$$

$$Q(\beta) = Q_0 + \beta w_0, \quad M(\alpha) = M_0 + \alpha w_0'.$$

Il est immédiat de vérifier que les conditions aux limites (38) et l'équation (5) § 5 sont des conditions nécessaires pour que la variation première de la fonctionnelle (39) soit nulle.

On se servira de la méthode d'approximation de la fonctionnelle (39) pour construire les analogues discrets des conditions aux limites (38). Soit $\bar{\omega}$ un réseau régulier sur l'intervalle $[0, l]$. Approchons les intégrales figurant dans (39), (40) par la formule de sommation des trapèzes et tenons compte des conditions aux limites pour $x = l$:

$$\int_0^l qw\, dx \sim \sum_{\omega} qwh + \frac{q(0) w(0)}{2} h,$$

$$\frac{B}{2} \int_0^l (w'')^2 dx \sim \frac{B}{2} \sum_{\omega} (w'')^2 h + \frac{B}{2} (w''(0))^2 \frac{h}{2}.$$

Remplaçons les dérivées secondes de la somme sur ω par les différences secondes

$$w'' \sim w_{\bar{x}x}.$$

On aura alors

$$I(w) \sim \frac{B}{2} \sum_{\omega} (w_{\bar{x}x})^2 h - \sum_{\omega} qwh + \frac{1}{2} \Big(\frac{Bh}{2} (w''(0))^2 +$$

$$+ \alpha (w'(0))^2 - 2M(\alpha) w'(0) \Big) + \frac{1}{2} (\beta w^2(0) - qhw(0) - 2Q(\beta) w(0)).$$

Construisons l'approximation de l'expression

$$A(w) = \frac{1}{2} \Big\{ \frac{Bh}{2} (w''(0))^2 + \alpha (w'(0))^2 - 2M(\alpha) w'(0) \Big\}.$$

En vertu de (38) il vient

$$w''(0) = \frac{\alpha w'(0) - M(\alpha)}{B},$$

donc

$$A(w)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha h}{2B}\right)[\alpha(w'(0))^2-2M(\alpha)w'(0)]+hM^2(\alpha)/(4B). \quad (41)$$

Approchons dans (41) la dérivée première par les différences progressives

$$w_x=w'+\frac{h}{2}w''+O(h^2).$$

En tenant compte de la première des conditions aux limites (38) on trouve que

$$w_x=\left(1+\frac{\alpha h}{2B}\right)w'-\frac{h}{2B}M(\alpha)+O(h^2),$$

ou

$$w'(0)=\frac{1}{1+\alpha h/(2B)}\left(w_x+\frac{h}{2B}M(\alpha)\right)+O(h^2).$$

En portant cette expression dans (41) et en négligeant les termes $O(h^2)$, on obtient l'approximation cherchée $A(w)$:

$$A_h(w)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\alpha h/(2B)}(\alpha(w_x)^2-2M(\alpha)w_x)-\frac{hM^2(\alpha)}{4B(1+\alpha h/(2B))}.$$

Prenons l'approximation discrète de la fonctionnelle $I(w)$ sous la forme

$$I_h(y)=\frac{B}{2}\sum_{\omega}(y_{xx})^2h-\sum_{\omega}qyh+$$
$$+\frac{1}{2(1+\alpha h/(2B))}(\alpha(y_x)^2-2M(\alpha)y_x)|_{x=0}+$$
$$+\frac{1}{2}(\beta y^2(0)-qhy(0)-2Q(\beta)y(0))-\frac{hM^2(\alpha)}{4B(1+\alpha h/(2B))}. \quad (42)$$

En dérivant maintenant (42) par rapport à $y(0)$ et $y(h)$ et en annulant les dérivées, on obtient les approximations suivantes des conditions aux limites (38):

$$-\frac{\alpha}{h(1+\alpha h/(2B))}y_x+\frac{1}{h}By_{xx}+\beta y+$$
$$+\frac{M(\alpha)}{h(1+\alpha h/(2B))}-Q(\beta)-\frac{q(0)h}{2}=0, \quad (43)$$
$$-\frac{B}{h}y_{xx}+By_{xxx}+\frac{\alpha y_x}{h(1+\alpha h/(2B))}-\frac{M(\alpha)}{h(1+\alpha h/(2B))}-hq(h)=0.$$

En ajoutant ces expressions, on obtient l'approximation de la deuxième des conditions (38); en multipliant la première expression

par $-h$, on déduira l'approximation de la première des conditions (38):

$$-By_{xx}+\frac{\alpha}{1+\alpha h/(2B)}(y_x-w_0')-h\beta(y-w_0)=$$
$$=\frac{M_0}{1+\alpha h/((2B)}-hQ_0-\frac{h^2q(0)}{2}, \quad (44)$$
$$By_{xxx}+\beta(y-w_0)=Q_0+h\left(\frac{q(0)}{2}+q(h)\right), \quad x=0.$$

Il est aisé de vérifier que pour β fini et α quelconque, les conditions (44) approchent les conditions (38) avec une erreur de $O(h^2)$.

Si $\beta=\infty$, il résulte de (43)

$$y=w_0, \quad x=0,$$

or ceci n'est autre que l'approximation de l'une des conditions (38).

5. Approximation des conditions aux limites pour équations différentielles à dérivées partielles d'ordre quatre. Soit à chercher sur le domaine $G=\{x=(x_1, x_2) \mid 0<x_\alpha<l_\alpha, \alpha=1, 2\}$ la solution de l'équation (1) § 5

$$D\Delta^2 w=q, \quad x\in G, \quad (45)$$

qui vérifie pour $x_1=0$ des conditions aux limites non homogènes du type (31) § 5 avec $C=0$:

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)+M, \quad x_1=0,$$
$$D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)=-\beta w-B\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}+Q, \quad x_1=0, \quad (46)$$

et pour $x_1=l_1$ et $x_2=0$, l_2 des conditions aux limites du type (34) § 5:

$$w(x_1, 0)=w(l_1, x_2)=w(x_1, l_2)=$$
$$=\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(l_1, x_2)=\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x_1, l_2)=\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}(x, 0)=0. \quad (47)$$

En vertu de (37) § 5, si $\alpha\neq\infty$, aux sommets $(0, 0)$, $(0, l_2)$ du domaine doivent être satisfaites les conditions de concordance qui s'écrivent ici

$$B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0, \quad x_1=0, \quad x_2=0, l_2. \quad (48)$$

Construisons les analogues discrets des conditions aux limites (46) en utilisant la méthode d'approximation de la fonctionnelle.

On vérifie aisément que la solution $w(x)$ du problème (45) à (48) minimise la fonctionnelle

$$I(w)=W-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w\,dx-\int_0^{l_2}\left\{M(x_2)\frac{\partial w}{\partial x_1}+Q(x_2)\,w\right\}\Big|_{x_1=0}dx_2, \quad (49)$$

où

$$W = \mathring{W} + W,$$

$$\mathring{W}(w) = \frac{D}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right\} dx_1\,dx_2, \qquad (50)$$

$$W(w) = \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \beta w^2\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2,$$

que nous approcherons sur le réseau régulier rectangulaire $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. Nous avons déjà approché des fonctionnelles de ce type, de sorte qu'en se servant des conditions aux limites (47), on peut écrire aussitôt

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} q(x)\,w(x)\,dx_1\,dx_2 \sim \sum_{\omega} qwh_1h_2 + \sum_{\omega_2}\frac{h_1}{2}\,h_2qw\Big|_{x_1=0}, \qquad (51)$$

$$\int_0^{l_2}\left\{M\frac{\partial w}{\partial x_1} + Qw\right\}\Big|_{x_1=0} dx_2 \sim \sum_{\omega_2}\left(M\frac{\partial w}{\partial x_1} + Qw\right)\Big|_{x_1=0} h_2.$$

Compte tenu des conditions de concordance (48), il vient

$$\mathring{W} \sim \frac{D}{2}\sum_{\omega}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\} h_1h_2 +$$

$$+ D(1-\nu)\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 h_1h_2 + \frac{D}{2}\sum_{\omega_2}\frac{h_1h_2}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right\}\Big|_{x_1=0}, \qquad (52)$$

$$W_1 \sim \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) + \beta w^2\right\}\Big|_{x_1=0} h_2.$$

Dans la première expression (52), remplaçons les dérivées figurant sous le signe $\sum\limits_{\omega}$ par les différences $w_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, les dérivées mixtes par les différences $w_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$ et notons

$$\mathring{W}^h(y) = \frac{D}{2}\sum_{\omega}\{(w_{\bar{x}_1x_1})^2 + (w_{\bar{x}_2x_2})^2 + 2\nu w_{\bar{x}_1x_1}w_{\bar{x}_2x_2}\}\,h_1h_2 +$$

$$+ D(1-\nu)\sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+}(w_{\bar{x}_1\bar{x}_2})^2\,h_1h_2. \qquad (53)$$

Etudions séparément l'approximation des dérivées figurant sous le signe $\sum\limits_{\omega_2}$ dans (51), (52). Composons avec les sommes sur ω_2 de (51), (52) l'expression suivante

$$I_1(w)=\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} h_2\left\{B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\beta w^2+\right.$$
$$+\frac{Dh_1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+(1-\nu^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right]-$$
$$\left.-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}-2Qw-h_1 qw\right\}\Big|_{x_1=0}, \qquad (54)$$

qui figure dans l'approximation de la fonctionnelle $I(w)$ par les formules de sommation. L'approximation des dérivées secondes par rapport à x_2 dans (54) ne posant aucune difficulté, concentrons notre attention sur l'approximation de l'expression

$$A(w)=\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{Dh_1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}.$$

En utilisant la première des conditions aux limites (46), on aura

$$A(w)=\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\frac{h_1}{2D}\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}-M\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}=$$
$$=\left(1+\frac{a_1\alpha}{2D}\right)\left[\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2-2M\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]+\frac{h_1}{2D}M^2.$$

Désormais $A(w)$ s'exprime uniquement en fonction de la dérivée première $\partial w/\partial x_1$, quant à sa méthode d'approximation nous l'avons traitée à maintes reprises. En portant la dérivée seconde, tirée de la condition aux limites (46), dans l'expression

$$w_{x_1}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+Q(h_1^2), \quad x_1=0$$

on obtient

$$w_{x_1}=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\frac{h_1 M}{2D}+O(h_1^2).$$

D'où il vient

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)^{-1}\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1 M}{2D}+O(h_1^2)\right]$$

et

$$A(w)=\alpha\left(1+\frac{h_1\alpha}{2D}\right)^{-1}\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1 M}{2D}+O(h_1^2)\right]^2-$$
$$-2M\left[w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h_1 M}{2D}+O(h_1^2)\right]+\frac{h_1}{2D}M^2.$$

En portant cette expression dans (54), en remplaçant les dérivées secondes par rapport à x_2 par $w_{\bar{x}_2x_2}$ et en négligeant les termes $O(h_1^2)$, on obtient l'expression suivante, notée $I_1^h(w)$:

$$I_1^h(w)=\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} h_2\Big\{B(w_{\bar{x}_2x_2})^2+\beta w^2+\frac{Dh_1}{2}(1-\nu^2)(w_{\bar{x}_2x_2})^2+$$
$$+\frac{\alpha}{1+\frac{h_1\alpha}{2D}}\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1M}{2D}\right)^2-2Qw-$$
$$-h_1qw-2M\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}\right)-\frac{h_1}{2D}M^2\Big\}. \qquad (55)$$

On approchera la fonctionnelle (49), (50) au moyen de la fonctionnelle discrète

$$I^h(w)=\overset{\circ}{W}{}^h(w)+I_1^h(w)+\sum_{\omega} qwh_1h_2, \qquad (56)$$

où $\overset{\circ}{W}{}^h(w)$ et $I_1^h(w)$ sont définis respectivement par (53) et (55).

Pour construire les approximations descrètes des conditions aux limites (46), il faut dériver la fonctionnelle discrète (56) par rapport à $w(x_1, x_2)$ pour $x_1 = 0$, h_1 et $x_2 \in \overset{\circ}{\omega}_2$, et ensuite annuler les expressions obtenues. La multiplication des expressions obtenues par $h_1h_2^{-1}$ donne

$$D(w_{\bar{x}_1x_1}+\nu w_{\bar{x}_2x_2})^{(+1_1)}+2D(1-\nu)h_1w_{x_1\bar{x}_2x_2}+$$
$$+h_1\Big\{Bw_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\beta w+\frac{h_1}{2}D(1-\nu^2)w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}-$$
$$-\frac{\alpha}{h_1(1+h_1\alpha/(2D))}\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1M}{2D}+\right.$$
$$+\frac{h_1\nu\alpha}{2(1+h_1\alpha/(2D))}\left(w_{x_1\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+\frac{h_1\nu}{2}M_{\bar{x}_2x_2}\right)-$$
$$-Q-\frac{h_1}{2}q+\frac{M}{h_1}-\frac{h_1\nu}{2}M_{\bar{x}_2x_2}\Big\}=0, \qquad (57)$$

$$\frac{\alpha}{1+h\alpha/(2D)}\left(w_{x_1}+\frac{h_1\nu}{2}w_{\bar{x}_2x_2}\right)-D(w_{\bar{x}_1x_1}+\nu w_{\bar{x}_2x_2})^{(+1_1)}+$$
$$+Dh_1(w_{\bar{x}_1x_1x_1}+\nu w_{\bar{x}_2x_2x_1})^{(+1_1)}+h_1^2D[w_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+$$
$$+(2-\nu)w_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_1x_2}-q]^{(+1_1)}-\frac{M}{1+h_1\alpha/(2D)}=0. \qquad (58)$$

Il est immédiat de vérifier que l'équation (58) approche la première des conditions aux limites (46) avec une erreur de $O(|h|^2)$. En ajoutant (57) et (58) et en divisant cette somme par h_1, on obtient

l'approximation de la deuxième des conditions (46) :

$$D\left(w_{\bar{x}_1 x_1 x_1} + (2-\nu)\, w_{\bar{x}_2 x_2 x_1}\right)^{(+1_1)} + B w_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + \beta w + Q +$$
$$+ \frac{h_1 \nu}{2} \frac{\alpha}{1 + h_1 \alpha/(2D)} \left(w_{x_1 \bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1 \nu}{2} w_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} \right) +$$
$$+ \frac{h_1}{2} D (1-\nu^2)\, w_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + h_1 D \left(w_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + \nu w_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_1 x_2} \right)^{(+1_1)} -$$
$$- \frac{h_1}{2} q - h_1 q^{(+1_1)} - \frac{h_1 \nu}{2} M_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{\alpha h_1 \nu}{2(1 + h_1 \alpha/(2D))} \frac{h_1}{2D} M_{\bar{x}_2 x_2} = 0. \quad (59)$$

L'équation (59) approche la deuxième des conditions aux limites (46) avec une erreur de $O(|h|^2)$.

CHAPITRE V

APPAREIL MATHÉMATIQUE DE LA THÉORIE DES SCHÉMAS DISCRETS

Le présent paragraphe est auxiliaire. On y introduit certaines des notations les plus fréquemment utilisées dans la suite et déduit les principales formules qui nous serviront à transformer les expressions contenant des fonctions discrètes. On développe ensuite sur des exemples unidimensionnels les principales méthodes d'obtention des estimations à priori et d'étude de la convergence des schémas discrets. On étudie par ailleurs les analogues discrets des théorèmes de plongement et on minore certains opérateurs discrets. Ces résultats servent à établir des estimations à priori et à étudier la vitesse de convergence des schémas discrets au chapitre VI.

§ 1. Notations, formules discrètes et quelques inégalités

1. Notations. Soit $\bar{\omega} = \{x = x_i \mid i = 0, 1, \ldots, N;\ x_0 = 0, x_N = l\}$ un réseau sur $[0, l]$. En x_i le pas est donné par $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ quant au pas moyen il vaut $\hbar_i = (h_i + h_{i+1})/2$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Posons $\hbar_0 = h_1/2$, $\hbar_N = h_N/2$. Le réseau est par définition *régulier* si le pas est constant en tous les nœuds, i.e. $h = l/N$.

Introduisons les notations suivantes:

$$\omega = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, N-1\},\ \mathring{\omega} = \{x_i \mid, i = 2, 3, \ldots, N-2\},$$

$$\omega^+ = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, N\},\ {}^+\omega = \{x_i \mid, i = 0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Soient $v(x)$ et $w(x)$ des fonctions discrètes définies sur $\bar{\omega}$. On appelle *produit scalaire* de ces fonctions l'expression

$$(v, w)_\omega = \sum_{i=0}^{N} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i. \tag{1}$$

Si $v(x_i)$ et $w(x_i)$ sont les valeurs prises sur le réseau $\bar{\omega}$ par les fonctions $v(x)$ et $w(x)$ de l'argument continu $x \in [0, l]$, le produit scalaire (1) n'est autre que la formule des trapèzes pour l'intégrale

$$\int_0^l v(x)\, w(x)\, dx. \tag{2}$$

Mis à part le produit scalaire (1) défini pour des fonctions discrètes sur $\bar{\omega}$, nous aurons besoin dans la suite des produits scalaires de fonctions discrètes sur ω^+, ${}^+\omega$, ω et $\mathring{\omega}$. Soit

$$(v, w)_{\omega^+} = \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\, w(x_i)\, h_i, \tag{3}$$

$$(v, w)_{+\omega} = \sum_{i=0}^{N-1} v(x_i)\, w(x_i)\, h_{i+1}, \tag{4}$$

$$(v, w)_{\omega} = \sum_{i=1}^{N-1} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i, \tag{5}$$

$$(v, w)_{\mathring{\omega}} = \sum_{i=2}^{N-2} v(x_i)\, w(x_i)\, \hbar_i.$$

Le produit scalaire (3) peut être interprété comme la formule des rectangles droits pour l'intégrale (2), et (4) comme la formule des rectangles gauches de la même intégrale. Il est aisé de vérifier que

$$(v, w)_{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}\left[(v, w)_{\omega^+} + (v, w)_{+\omega}\right].$$

Parfois, si aucune confusion n'est à craindre, on omettra l'indice spécifiant sur quel réseau a lieu la sommation et on écrira tout simplement (v, w).

2. Formules discrètes. Pour transformer les expressions contenant les différences de fonctions discrètes on aura besoin de formules pour établir directement les différences de produit. La définition des différences entraîne l'existence des formules suivantes:

$$(vw)_{\bar{x},i} = v_{\bar{x},i} w_{i-1} + v_i w_{\bar{x},i} = v_{\bar{x},i} w_i + v_{i-1} w_{\bar{x},i} =$$
$$= v_{\bar{x},i} w_i + v_i w_{\bar{x},i} - h_i v_{\bar{x},i} w_{\bar{x},i}, \tag{6}$$

$$(vw)_{x,i} = v_{x,i} w_{i+1} + v_i w_{x,i} = v_{x,i} w_i + v_{i+1} w_{x,i} =$$
$$= v_{x,i} w_i + v_i w_{x,i} + h_{i+1} v_{x,i} w_{x,i}. \tag{7}$$

De ces formules on déduit sans peine les formules de sommations par parties. En multipliant par exemple (6) par h_i et en sommant l'expression obtenue sur i entre $m+1$ et n $(0 \leqslant m < n \leqslant N)$ il

vient

$$\sum_{i=m+1}^{n} (vw)_{\bar{x},\,i} h_i = \sum_{i=m+1}^{n} v_{\bar{x},\,i} w_{i-1} h_i + \sum_{i=m+1}^{n} v_i w_{\bar{x},\,i} h_i.$$

En sommant à gauche et en effectuant le changement d'indice $i - 1 = i'$ dans la première somme de droite, on obtient après réduction la formule suivante:

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i w_{\bar{x},\,i} h_i = -\sum_{i=m}^{n-1} v_{x,\,i} w_i h_{i+1} + v_n w_n - v_m w_m \tag{8}$$

(*formule de sommation par parties*). Le premier terme de la somme du second membre de (8) vaut

$$v_{x,\,m} w_m h_{m+1} = v_{m+1} w_m - v_m w_m.$$

Donc on peut mettre (8) sous la forme

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} v_{x,\,i} w_i h_{i+1} = -\sum_{i=m+1}^{n} v_i w_{\bar{x},\,i} h_i + v_n w_n - v_{m+1} w_m. \tag{9}$$

En tenant compte de

$$v_{x,\,i} h_{i+1} = v_{\hat{x},\,i} \hbar_i,$$

on obtient à partir de (9):

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} v_{\hat{x},\,i} w_i \hbar_i = \sum_{i=m+1}^{n} v_i w_{\bar{x},\,i} h_i + v_n w_n - v_{m+1} w_m. \tag{10}$$

Si dans (10) on pose $v_i = a_i u_{x,\,i}$, $w_i = v_i$ on aura

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} (a u_{\bar{x}})_{\hat{x},\,i} v_i \hbar_i = -\sum_{i=m+1}^{n} a_i u_{\bar{x},\,i} v_{\bar{x},\,i} h_i + a_n u_{\bar{x},\,n} v_n - a_{m+1} u_{x,\,m} v_m. \tag{11}$$

Lorsque $m = 0$, $n = N$ la formule (11) s'appelle *première formule de Green discrète* et peut être écrite:

$$((a u_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ v)_\omega = -(a u_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+} + a_N u_{\bar{x},\,N} v_N - a_1 u_{x,\,0} v_0. \tag{12}$$

En ôtant de (12) l'expression

$$((a v_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ u)_\omega = -(a v_{\bar{x}},\ u_{\bar{x}})_{\omega^+} + a_N v_{x,\,N} u_N - a_1 v_{x,\,0} u_0,$$

on obtient

$$((a u_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ v)_\omega - ((a v_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ u)_\omega = a_N (u_{\bar{x}} v - u v_{\bar{x}})_N - a_1 (u_x v - u v_x)_0 \tag{13}$$

(ou *deuxième formule de Green discrète*).

Des expressions identiques à la première et la deuxième formule de Green discrète (12), (13) sont valables pour l'opérateur discret

du quatrième ordre $(bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}$. Etablissons par exemple l'analogue de la première formule de Green (12) sous l'hypothèse que le réseau $\bar{\omega}$ est régulier. En reprenant les raisonnements de la démonstration (13), pour $m = 1$, $n = N - 1$, $a \equiv 1$ et $u \equiv w$, on déduit à partir de (11) l'identité

$$(w_{\bar{x}x}, v)_{\overset{\circ}{\omega}} - (w, v_{\bar{x}x})_{\overset{\circ}{\omega}} = (w_{\bar{x}}v - wv_{\bar{x}})_{N-1} - (w_x v - wv_x)_1.$$

Otons des deux membres de cette identité l'expression $h\,(w_1 v_{\bar{x}x,\,1} + w_{N-1}v_{\bar{x}x,\,N-1})$ et remarquons que

$$(v_x - hv_{\bar{x}x})_1 = v_{\bar{x},\,1} = v_{x,\,0},$$

$$(-v_{\bar{x}} - hv_{\bar{x}x})_{N-1} = -v_{x,\,N-1} = -v_{x,\,N}.$$

On obtient

$$(w_{\bar{x}x}, v)_{\overset{\circ}{\omega}} - (w, v_{\bar{x}x})_{\omega} = (w_{\bar{x},\,N-1}v_{N-1} - w_{N-1}v_{\bar{x},\,N}) - (w_{x,\,1}v_1 - w_1 v_{x,\,0}).$$

En posant $w \equiv bu_{\bar{x}x}$ on obtient la *première formule de Green discrète pour l'opérateur d'ordre quatre*

$$\begin{aligned}((bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}, v)_{\overset{\circ}{\omega}} = (bu_{\bar{x}x}, v_{\bar{x}x})_{\omega} + [(bu_{\bar{x}x})_{\bar{x}}v - bu_{\bar{x}x}v_{\bar{x}}]_{N-1} - \\ - [(bu_{\bar{x}x})_x v - bu_{\bar{x}x}v_{\bar{x}}]_1.\end{aligned} \tag{14}$$

3. Quelques inégalités. Dans la suite nous ferons souvent appel à des inégalités classiques d'algèbre.

1) *Inégalité de Cauchy*:

$$\Big|\sum_{i,\,j=0}^{n} \alpha_{ij}a_i b_j\Big| \leqslant \Big(\sum_{i,\,j=0}^{n} \alpha_{ij}a_i a_j\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i,\,j=0}^{n} \alpha_{ij}b_i b_j\Big)^{1/2}, \tag{15}$$

où $\alpha_{ij} \geqslant 0$ pour $i, j = 0, 1, \ldots, n$.

2) *ε-inégalité*:

$$|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2, \tag{16}$$

où ε est un nombre positif arbitraire.

Parfois l'inégalité (15) de Cauchy prend une forme spéciale. Si par exemple $n = N$, $\alpha_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, $\alpha_{ii} = h_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $\alpha_{00} = h_1/2$, $\alpha_{NN} = h_N/2$ et $a_i = u(x_i)$, $b_i = v(x_i)$ l'inégalité (15) devient

$$|(u, v)_{\bar{\omega}}| \leqslant (u, u)_{\bar{\omega}}^{1/2}(v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2}.$$

La quantité $(v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2}$ est l'analogue discret de la norme de L_2. On peut donc poser

$$\|v\|_{L_2(\bar{\omega})} = (v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2},$$

et l'inégalité précédente s'écrit

$$|(u, v)_{\bar{\omega}}| \leqslant \|u\|_0\,\|v\|_0,$$

où $\|v\|_0 = \|v\|_{L_2(\omega)}$.

§ 2. Modèles unidimensionnels

L'exposé de ce paragraphe est méthodique. On aborde les problèmes aux limites pour équations ordinaires discrètes d'ordre deux et quatre. Les méthodes d'étude des problèmes discrets sont illustrées sur ces exemples simples. Cette étude se décompose en trois étapes:
1) solubilité du problème, 2) stabilité du problème d'après le second membre et les conditions aux limites, 3) vitesse de convergence de la solution du problème discret vers celle du problème à approcher. La seconde étape consiste essentiellement à estimer la solution à priori. L'estimation à priori permet à son tour d'une part d'établir la solubilité du problème, d'autre part d'évaluer la vitesse de convergence du problème discret.

1. Premier problème aux limites pour équation du second ordre en dimension un. Soit à résoudre sur le réseau $\bar{\omega} = \{x = x_i \mid i = 0, 1, \ldots, N;\ x_0 = 0,\ x_N = l\}$ le problème

$$\Lambda y \equiv -(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} = \varphi,\ x \in \omega,\ y(0) = u_0,\ y(l) = u_1. \tag{1}$$

On supposera que les coefficients $a(x)$ du problème (1) vérifient la condition

$$a(x) \geqslant c_0 > 0,\ x \in \omega^+. \tag{2}$$

Etudions la solubilité de ce problème. Considérons le problème homogène ($\varphi \equiv 0$, $u_0 = u_1 = 0$) qui admet nécessairement une solution. Notons-la $y(x)$. Multiplions l'équation (1) par $y\hbar$ et sommons sur le réseau ω. Transformons l'expression obtenue à l'aide de la première formule de Green discrète (12) § 1. Il vient

$$(\Lambda y,\ y)_\omega = [y,\ y] = 0, \tag{3}$$

où

$$[v,\ v] \equiv (av_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+}. \tag{4}$$

De (4) et compte tenu de (2) il vient $[v,\ v] \geqslant c_0\,(v_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+} \geqslant 0$. Or $(v_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+} = 0$ uniquement pour $v(x) = \text{const}$, $x \in \bar{\omega}$ donc de (3) il résulte que l'unique solution du problème homogène est une constante qui est nulle en vertu des conditions aux limites. Donc quels que soient $\varphi(x)$, u_0 et u_1 le problème (1), (2) admet une solution et une seule.

Estimons à priori la solution du problème (1). Considérons préalablement le problème avec des conditions aux limites homogènes

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{5}$$

Soit $\overset{\circ}{V}$ l'ensemble des fonctions discrètes définies sur $\bar{\omega}$ et nulles pour $x = 0,\ l$. Munissons cet ensemble de deux normes: la première

$$\|v\|_1^2 = (v_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{\omega^+}, \tag{6}$$

qui le transforme en un espace normé que nous noterons $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\bar{\omega})$ la seconde

$$\|\varphi\|_{-1} = \sup_{0 \neq v \in \overset{\circ}{V}} \frac{|(\varphi, v)_\omega|}{\|v\|_1^\circ}, \tag{7}$$

qui le transforme en un espace normé $W_2^1(\omega)$. Multiplions l'équation (1) par $y\hbar$, sommons sur le réseau ω et, en tenant compte des conditions aux limites (5), transformons l'expression obtenue à l'aide de la première formule de Green discrète (12) § 1.

On obtient

$$(ay_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega+} = (\varphi, y)_\omega.$$

L'inégalité (2) et les expressions (6), (7) entraînent

$$c_0 \|y\|_1^{\circ 2} \leqslant |(\varphi, y)_\omega| \leqslant \|y\|_1^\circ \|\varphi\|_{-1}, \tag{8}$$

ou

$$\|y\|_1^\circ \leqslant \frac{1}{c_0} \|\varphi\|_{-1}. \tag{9}$$

Ce qui n'est autre que l'estimation annoncée du problème (1), (5).

Revenons au problème (1) avec des conditions aux limites non homogènes. Mettons la solution de ce problème sous la forme

$$y(x) = \bar{y}(x) + \overset{\circ}{y}(x), \qquad x \in \bar{\omega}, \tag{10}$$

où

$$\bar{y}_{\bar{x}\hat{x}} = 0, \ x \in \omega, \ \bar{y}(0) = u_0, \ \bar{y}(l) = u_1, \tag{11}$$

et

$$\Lambda \overset{\circ}{y} = \varphi - \Lambda \bar{y}, \ x \in \omega, \ \overset{\circ}{y}(0) = \overset{\circ}{y}(l) = 0. \tag{12}$$

Estimons les solutions des problèmes (11) et (12). On supposera en plus de (2) que

$$a(x) \leqslant c_1, \quad x \in \omega^+. \tag{13}$$

Utilisons (8) pour estimer la solution du problème (12)

$$c_0 \|\overset{\circ}{y}\|_1^{\circ 2} \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|\overset{\circ}{y}\|_1^\circ + |(\Lambda \bar{y}, \overset{\circ}{y})_\omega|. \tag{14}$$

La première formule de Green discrète (12) § 1 entraîne

$$|(\Lambda \bar{y}, \overset{\circ}{y})_\omega| = |a\bar{y}_{\bar{x}}, \overset{\circ}{y}_{\bar{x}})_{\omega+}| \equiv |[\bar{y}, \overset{\circ}{y}]|,$$

et la condition (13) et l'inégalité de Cauchy (15) § 1

$$|(\Lambda \bar{y}, \overset{\circ}{y})_\omega| \leqslant c_1 \|\bar{y}\|_1^\circ \|\overset{\circ}{y}\|_1^\circ.$$

En portant cette majoration dans (14), on obtient

$$c_0 \|\overset{\circ}{y}\|_1^{\circ 2} \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|\overset{\circ}{y}\|_1^\circ + c_1 \|\bar{y}\|_1^\circ \|\overset{\circ}{y}\|_1^\circ,$$

d'où

$$\|\overset{\circ}{y}\|_1^\circ \leqslant \frac{1}{c_0}\|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0}\|\bar{y}\|_1^\circ. \tag{15}$$

Trouvons maintenant $\bar{y}(x)$. De (11) il s'ensuit

$$\bar{y}(x) = \frac{u_1 - u_0}{l}x + u_0, \tag{16}$$

donc

$$\|\bar{y}\|_1^\circ = \frac{1}{\sqrt{l}}|u_1 - u_0|.$$

En portant cette expression dans (15), on obtient la majoration de la fonction $\overset{\circ}{y}(x)$

$$\|\overset{\circ}{y}\|_1^\circ \leqslant \frac{1}{c_0}\|\varphi\|_{-1} + \frac{c_1}{c_0\sqrt{l}}|u_1 - u_0|. \tag{17}$$

Estimons $\bar{y}$. La fonction $\bar{y}(x)$ n'appartient pas à l'ensemble $\overset{\circ}{V}$, i.e. n'est pas nulle pour $x = 0, l$. Donc la quantité $(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega+}$ ne peut servir de norme à cette fonction, car $(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega+} = 0$ lorsque $v(x) = \text{const} \neq 0$, $x \in \bar{\omega}$. En vertu de ceci introduisons la nouvelle norme

$$\|v\|_1^2 \equiv (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega+} + (v, v)_{\bar{\omega}} \tag{18}$$

et estimons $\bar{y}$ relativement à cette norme. L'expression (16) entraîne

$$(\bar{y}_{\bar{x}}, \bar{y}_{\bar{x}})_{\omega+} = \frac{|u_1 - u_0|^2}{l},$$

$$(\bar{y}, \bar{y})_{\bar{\omega}} \leqslant l \max_{x\in\bar{\omega}} |\bar{y}|^2 \leqslant l(|u_0| + |u_1|)^2,$$

donc

$$\|\bar{y}\|_1 \leqslant \sqrt{l + 1/l}\,(|u_0| + |u_1|). \tag{19}$$

Revenons à l'estimation de la solution du problème (1). De (10) il résulte

$$\|y\|_1 \leqslant \|\bar{y}\|_1 + \|\overset{\circ}{y}\|_1. \tag{20}$$

Le premier terme du second membre est estimé par (19), quant à la fonction $\overset{\circ}{y}$ elle ne peut être estimé que relativement à la norme de $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. Or de (6) et (18), il s'ensuit

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_{1\,\circ}^2 + (v, v)_{\bar{\omega}},$$

il suffit donc d'estimer $(\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y})_{\overline{\omega}} \equiv \| \overset{\circ}{y} \|_0^2$. Au § 5 on montrera (lemme 2) que pour les fonctions de $\overset{\circ}{V}$ on aura l'inégalité *)

$$\| v \|_{\overset{\circ}{1}}^2 \geqslant \frac{8}{l^2} \| v \|_0^2.$$

Donc

$$\| v \|_{\overset{\circ}{1}}^2 \geqslant \frac{1}{(1+l^2/8)} \| v \|_1^2. \tag{21}$$

En tenant compte de cette estimation on déduit à partir de (17)

$$\| \overset{\circ}{y} \|_1 \leqslant \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{c_0} \| \varphi \|_{-1} + \frac{c_1}{c_0} + \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{l^{1/2}} (| u_0 | + | u_1 |).$$

En majorant le second membre de (20) à l'aide de cette inégalité et de l'inégalité (19) on obtient en définitive

$$\| y \|_1 \leqslant M_1 \| \varphi \|_{-1} + M_2 (| u_0 | + | u_1 |), \tag{22}$$

où

$$M_1 \leqslant \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{c_0}, \qquad M_2 = \frac{c_1}{c_0} \frac{\sqrt{1+l^2/8}}{l^{1/2}} + \sqrt{l+1/l}.$$

On a donc estimé à priori la solution du problème (1). On remarquera que les constantes M_1 et M_2 figurant dans cette estimation ne dépendent pas du réseau $\overline{\omega}$, de sorte que (22) entraîne la stabilité de la solution du problème (1) relativement au second membre et aux conditions aux limites.

Appliquons cette estimation à priori à l'étude de la vitesse de convergence du schéma discret. Considérons le problème suivant sur l'intervalle $[0, l]$

$$(ku')' = -f, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1 \tag{23}$$

et en vertu du § 2 du chapitre II approchons-le sur un réseau irrégulier arbitraire $\overline{\omega}$ avec le problème (1) en posant par exemple

$$a(x_i) = k(x_i - h_i/2), \quad \varphi(x_i) = f(x_i). \tag{24}$$

S'agissant de la fonction $z(x) = y(x) - u(x)$, $x \in \overline{\omega}$ on obtient le problème

$$\Lambda z = \psi, \quad x \in \omega, \quad z(0) = z(l) = 0, \tag{25}$$

où $\psi(x) = \Lambda u + f$ est l'erreur d'approximation. Estimons la solution du problème (25). En tenant compte de l'inégalité (9) on obtient

$$\| z \|_{\overset{\circ}{1}} \leqslant \frac{1}{c_0} \| \psi \|_{-1}. \tag{26}$$

*) On rappelle que notre exposé est méthodique. L'un de nos objectifs est de définir le type des inégalités spéciales qui seront nécessaires à l'étude des schémas discrets. Cette note et les suivantes sont précisément relatives à de telles inégalités dont nous donnerons la démonstration aux §§ 4, 5.

Il est aisé de vérifier (cf. par exemple les formules (6), (7), (8) du § 2 ch. IV) que l'erreur d'approximation $\psi(x)$ admet la représentation suivante

$$\psi(x) = \eta_{\hat{x}} + \overset{*}{\psi}, \quad \eta(x) = O(h^2), \quad \overset{*}{\psi}(x) = O(\hbar^2). \tag{27}$$

Puisque $\|\psi\|_{-1}$ est défini par (7), estimons $(\psi, v)_\omega$ pour $v \in \overset{\circ}{V}$. Tenant compte de (27) et du fait que $\eta_{\hat{x},i} = \frac{h_{i+1}}{h_i}\eta_{x,i}$, on aura

$$(\psi, v)_\omega = (\eta_{\hat{x}}, v)_\omega + (\overset{*}{\psi}, v)_\omega = \sum_{i=1}^{N-1} \eta_{x,i} v_i h_{i+1} + (\overset{*}{\psi}, v)_\omega.$$

Transformant le premier terme du second membre au moyen des formules de sommation par parties (9) § 1, on trouve

$$(\psi, v)_\omega = -(\eta, v_{\bar{x}})_{\omega+} + (\overset{*}{\psi}, v)_\omega.$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy (15) § 1 pour évaluer le second membre, on obtient

$$(\psi, v)_\omega | \leqslant (\eta^2, 1)^{1/2}_{\omega+} \|v\|_{\overset{\circ}{1}} + \|\overset{*}{\psi}\|_0 \|v\|_0 \leqslant \{(\eta^2, 1)_{\omega+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2} \|v\|_1.$$

Portant cette estimation dans la définition (7) et tenant compte de l'inégalité (21), on obtient en définitive

$$\|\psi\|_{-1} \leqslant \{(\eta^2, 1)_{\omega+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2} \sup \frac{\|v\|_1}{\|v\|_{\overset{\circ}{1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{1 + l^2/8}\, \{(\eta^2, 1)_{\omega+} + \|\overset{*}{\psi}\|_0^2\}^{1/2}$$

En vertu de (27), de cette inégalité et de (26), il vient

$$\|z\|_{\overset{\circ}{1}} = O(|h|^2), \quad |h| = \max h(x).$$

Donc la solution du problème discret (1), (24) converge sous l'hypothèse (2) vers une solution suffisamment différentiable du problème (23) à la vitesse de $O(|h|^2)$.

2. Troisième problème aux limites pour une équation du second ordre en dimension un. Considérons le problème suivant sur un réseau régulier $\bar{\omega}$ sur l'intervalle $[0, l]$:

$$\begin{gathered} \Lambda y \equiv -(a y_{\bar{x}})_x + d y = \varphi(x), \quad x \in \omega, \\ -a_1 y_{x,0} + \left(\varkappa_0 + \frac{h}{2} d_0\right) y_0 = g_0 + \frac{h}{2}\varphi_0, \\ a_N y_{\bar{x},N} + \left(\varkappa_1 + \frac{h}{2} d_N\right) y_N = g_1 + \frac{h}{2}\varphi_N. \end{gathered} \tag{28}$$

On supposera que le coefficient $a(x)$ vérifie la condition (2) et les coefficients $d(x)$, $\varkappa_0$ et $\varkappa_1$ les conditions

$$d(x) \geqslant 0, \quad x \in \bar{\omega}, \quad \varkappa_0 \geqslant 0, \quad \varkappa_1 \geqslant 0, \tag{29}$$

$$\varkappa_0 + \varkappa_1 + (d, 1)_{\bar{\omega}} > 0. \tag{30}$$

Soit l'opérateur $\bar{\Lambda}$ défini par

$$\bar{\Lambda} v(x) = \begin{cases} -\frac{2}{h} a_1 v_x + \left(\frac{2}{h}\varkappa_0 + d_0\right) v, & x = 0, \\ -(a v_{\bar{x}})_x + dv, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} a_N v_{\bar{x}})_x + \left(\frac{2}{h}\varkappa_1 + d_N\right), & x = l. \end{cases} \tag{31}$$

Récrivons le problème (28) sous la forme suivante:

$$\bar{\Lambda} v = \Phi, \qquad x \in \bar{\omega}, \tag{32}$$

où

$$\Phi = \begin{cases} \varphi_0 + \frac{2}{h} g_0, & x = 0, \\ \varphi(x), & x \in \omega, \\ \varphi_N + \frac{2}{h} g_1, & x = l. \end{cases} \tag{33}$$

Penchons-nous sur la solubilité du problème (32). Etudions le produit scalaire $(\bar{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}}$. La formule de Green (12) § 1 donne

$$(\bar{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}} = (a v_{\bar{x}} v_{\bar{x}})_{\omega+} + (dv, v)_{\bar{\omega}} + \varkappa_0 v_0^2 + \varkappa_1 v_N^2 \equiv [v, v], \tag{34}$$

d'où et des conditions (2) et (29), il vient

$$[v, v] \geqslant 0$$

et de plus si $[v, v] = 0$ alors $v \equiv \text{const}$, $x \in \bar{\omega}$. Comme l'une au moins des quantités $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $d(\mathring{x})$, où $\mathring{x}$ est un nœud du réseau $\bar{\omega}$, est positive l'égalité $[v, v] = 0$ entraîne la nullité soit de $v(0)$, soit de $v(l)$, soit de $v(\mathring{x})$, i.e. $v \equiv 0$.

Posons maintenant dans l'équation (32) $\Phi \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}$ et considérons le problème homogène obtenu. En vertu de l'identité (34) sa solution $y(x)$ vérifie la condition $[y, y] = 0$ ce qui en vertu de ce qui vient d'être démontré entraîne que $y(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}$. Sous les hypothèses (2), (29), (30) le problème homogène (32) n'admet que la solution triviale, donc il est soluble quelle que soit la fonction $\Phi(x)$. Estimons à priori la solution du problème (32). Pour cela posons $v \equiv y$ dans (34) et utilisons l'équation (32) et la formule (33). On obtient en définitive

$$[y, y] = (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + g_0 y(0) + g_1 y(l). \tag{35}$$

On estimera la solution $y(x)$ relativement à la norme de l'espace $W_2^1(\bar{\omega})$ (cf. (18)). Supposons que les coefficients $d(x)$, $\varkappa_0$ et $\varkappa_1$ du problème (32) sont tels que l'on ait l'inégalité

$$[v, v] \geqslant m \| v \|_1^2, \tag{36}$$

où m est une constante positive ne dépendant ni du réseau ω ni de la fonction $v(x)$. Tenant compte de (34) il est aisé de vérifier que l'inégalité (36) aura lieu si, outre les conditions (2) et (29), est remplie la condition subsidiaire

$$d(x) \geqslant c_3 > 0, \quad x \in \bar{\omega}.$$

Les autres conditions suffisantes de validité de l'inégalité (36) seront établies au § 5.

Ainsi, l'identité (35) et l'inégalité (36) entraînent

$$\| y \|_1^2 \leqslant \frac{1}{m} \{ | (\varphi, y)_{\bar{\omega}} | + | g_0 y(0) | + | g_1 y(l) | \}.$$

Soit

$$\| \varphi \|_{-1}^{\circ} = \sup_{v \neq 0} \frac{| (\varphi, v)_{\bar{\omega}} |}{\| v \|_1}. \tag{37}$$

Alors

$$\| y \|_1^2 \leqslant \frac{1}{m} \{ \| \varphi \|_{-1}^{\circ} \| y \|_1 + | g_0 | \, | y(0) | + | g_1 | \, | y(l) | \}.$$

Pour obtenir à partir de là une estimation à priori, il faut savoir estimer $| y(0) |$ et $| y(l) |$ en fonction de $\| y \|_1$. Au § 4 (théorème 2) on démontrera que

$$\| v \|_C \equiv \max_{x \in \bar{\omega}} | v(x) | \leqslant M \| v \|_1, \tag{38}$$

où M est une constante positive ne dépendant ni du réseau $\bar{\omega}$ ni de $v(x)$. En portant cette inégalité dans la précédente, on obtient la majoration à priori

$$\| y \|_1 \leqslant \frac{1}{m} \{ \| \varphi \|_{-1}^{\circ} + M (| g_0 | + | g_1 |) \}. \tag{39}$$

Cette majoration entraîne la stabilité de la solution du problème (30) relativement au second membre et aux conditions aux limites.

Appliquons la majoration à priori (39) à l'étude de la convergence du schéma discret. Considérons le problème suivant sur l'intervalle $[0, l]$:

$$\begin{gathered} (ku')' - qu = -f(x), \quad 0 < x < l, \\ k(0) u'(0) = \varkappa_0 u(0) - g_0, \quad -k(l) u'(l) = \varkappa_1 u(l) - g_1 \end{gathered} \tag{40}$$

et en vertu du § 2 chapitre II, approchons-le sur le réseau régulier $\bar{\omega}$ par le problème (28) en posant

$$a(x_i) = k(x_i - h/2), \quad d(x_i) = q(x_i), \quad \varphi(x_i) = f(x_i). \tag{41}$$

La fonction $z(x) = y(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega}$, où $y(x)$ est solution du problème (28), (41) et $u(x)$ celle du problème (40), est à son tour solution du problème suivant :

$$\begin{gathered} \Lambda z = \psi(x), \qquad x \in \omega, \\ -a_1 z_{x,0} + \left(\varkappa_0 + \frac{h}{2} d_0\right) z_0 = \psi_0, \\ a_N z_{\bar{x},N} + \left(\varkappa_1 + \frac{h}{2} d_N\right) z_N = \psi_N. \end{gathered} \tag{42}$$

Au § 3 chapitre II, on a montré que si la solution du problème (40) est suffisamment différentiable, l'erreur d'approximation de l'équation et des conditions aux limites est $O(h^2)$, i.e.

$$\psi(x) = O(h^2), \quad x \in \omega, \quad \psi_0 = O(h^2), \quad \psi_N = O(h^2). \tag{43}$$

S'agissant de la solution du problème (42), en vertu de l'inégalité (39) on a

$$\|z\|_1 \leqslant \frac{1}{m} \{ \|\psi\|_{\overset{\circ}{-1}} + M(|\psi_0| + |\psi_N|) \}.$$

Comme (cf. formule (37)) $\|\psi\|_{\overset{\circ}{-1}} \leqslant \|\psi\|_0 \leqslant \sqrt{l}\, \|\psi\|_C$, la majoration précédente et (43) entraînent $\|z\|_1 = O(h^2)$. Si donc la condition (36) est remplie la solution du problème (28) converge vers celle du problème (40) à la vitesse $O(h^2)$.

3. Deuxième problème aux limites pour une équation du second ordre en dimension un. Dans (28) posons $d(x) \equiv 0$, $\varkappa_0 = \varkappa_1 = 0$. Ceci étant le problème (28) devient

$$\begin{gathered} -(a y_{\bar{x}})_x = \varphi, \qquad x \in \omega, \\ -a_1 y_{x,0} = g_0 + \frac{h}{2} \varphi_0, \quad a_N y_{\bar{x},N} = g_1 + \frac{h}{2} \varphi_N. \end{gathered} \tag{44}$$

On remarquera que les hypothèses précédentes contredisent la condition (30) qui a joué un rôle déterminant dans l'étude de la solubilité du problème (28). Il est immédiat de vérifier que le problème homogène (44) admet une solution non triviale $y(x) = \text{const}$, donc le problème (43) est dégénéré, et, partant, ne peut posséder de solution quels que soient les seconds membres $\varphi(x)$ et g_0, g_1. Comme $[v, v] \equiv (a v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} = 0$ uniquement pour $y(x) \equiv \text{const}$, en vertu de l'identité (34) $y(x) \equiv \text{const}$ est l'unique solution du problème (44).

Soit l'opérateur $\overset{\circ}{\bar{\Lambda}}$ défini par la formule (cf. avec (31)) :

$$\overset{\circ}{\bar{\Lambda}} v(x) \equiv \begin{cases} -\frac{2}{h} a_1 v_x, & x = 0, \\ -(a v_{\bar{x}})_x, & x \in \omega, \\ \frac{2}{h} a_N v_{\bar{x}}, & x = l. \end{cases}$$

De ce qui précède il suit que zéro est une valeur propre multiple de cet opérateur, donc le problème non homogène (44) admettra une solution si ses seconds membres sont assujettis à une condition. Transformant le produit scalaire $(\overset{\circ}{\bar{\Lambda}} y, 1)_{\bar{\omega}}$ à l'aide de la deuxième formule de Green (13), § 1, il vient $(\overset{\circ}{\bar{\Lambda}} y, 1)_{\bar{\omega}} = 0$. Or

$$(\overset{\circ}{\bar{\Lambda}} y, 1)_{\bar{\omega}} = (\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1,$$

donc on doit avoir

$$(\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1 = 0. \tag{45}$$

Si donc la condition (45) est remplie, le problème (44) admet une solution. Estimons à priori cette solution. Comme pour le problème (28), on trouve

$$[y, y] \equiv (a y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+} = (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + g_0 y(0) + g_1 y(l).$$

La condition (12), la définition (37) et l'inégalité (38) entraînent

$$c_0 (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})_{\omega^+} \leqslant \| \varphi \|_{-1}^{\circ} \| y \|_1 + M (|g_0| + |g_1|) \| y \|_1. \tag{46}$$

Au § 5 on montrera (lemme 3) que

$$(v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+} \geqslant M_1 \| v \|_1^2 - M_2 (v, 1)_{\bar{\omega}}^2,$$

où M_1 et M_2 sont des constantes positives ne dépendant ni du réseau $\bar{\omega}$ ni de $v(x)$. En tenant compte de cela, on déduit de l'inégalité (46)

$$c_0 M_1 \| y \|_1^2 \leqslant \| \varphi \|_{-1}^{\circ} \| y \|_1 + M (|g_0| + |g_1|) \| y \|_1 + c_0 M_2 (y, 1)_{\bar{\omega}}^2.$$

Utilisons maintenant ε-inégalité (16) § 1 pour estimer les produits $\| \varphi \|_{-1}^{\circ} \| y \|_1$, $|g_0| \| y \|_1$, $|g_1| \| y \|$. Il vient

$$(c_0 M_1 - \varepsilon - 2M\varepsilon) \| y \|_1^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \| \varphi \|_{-1}^{2\circ} + \frac{M}{4\varepsilon} (|g_0|^2 + |g_1|^2) + c_0 M_2 (y, 1)_{\bar{\omega}}^2.$$

En choisissant $\varepsilon > 0$ par exemple à partir de la condition $(c_0 M_1 - \varepsilon - 2M\varepsilon) = c_0 M_1 / 2$, on obtient l'estimation à priori suivante :

$$\| y \|_1^2 \leqslant M_3 \{ \| \varphi \|_{-1}^{2\circ} + |g_0|^2 + |g_1|^2 + (y, 1)_{\bar{\omega}}^2 \}. \tag{47}$$

En plus des quantités connues, le second membre de (47) renferme le carré du produit scalaire de la solution cherchée par l'unité.

La présence de ce terme est due au fait que la solution cherchée n'est pas univoque comme dans les problèmes (1) et (28), mais contient un terme additif arbitraire.

Appliquons maintenant l'estimation à priori (47) à l'étude de la vitesse de convergence du schéma discret. Considérons le problème suivant sur l'intervalle $[0, l]$

$$(ku')' = -f(x), \quad k(0)\,u'(0) = -g_0, \quad -k(l)\,u'(l) = -g_1. \tag{48}$$

On supposera remplie la condition de solubilité

$$\int_0^l f(x)\,dx + g_0 + g_1 = 0. \tag{49}$$

La donnée de la projection de la solution cherchée sur l'unité

$$\int_0^l u(x)\,dx = Q \tag{50}$$

en assure l'unicité. Sur le réseau régulier $\bar{\omega}$ approchons le problème (48), (49) par le problème (44), où

$$a(x_i) = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right), \quad \varphi(x_i) = f(x_i) - R/l,$$
$$R = (f, 1)_{\bar{\omega}} + g_0 + g_1, \tag{51}$$

et la condition (50) par la condition

$$(y, 1)_{\bar{\omega}} = Q. \tag{52}$$

En vertu des formules (51), la condition (45) est réalisée pour le problème à approcher, donc celui-ci est soluble.

Soit la fonction $z(x) = y(x) - u(x)$, où $y(x)$ est solution du problème (44), (51) et $u(x)$ du problème (48), (49), (50). Pour la fonction $z(x)$ on obtient le problème

$$-(az_{\bar{x}})_x = \psi(x), \quad x \in \omega, \quad -a_1 z_{x,0} = \psi(0), \quad a_N z_{\bar{x},N} = \psi(l),$$
$$(z, 1)_{\bar{\omega}} = Q - (u, 1)_{\bar{\omega}}. \tag{53}$$

Les problèmes (44), (51), (52) et (48), (49), (50) étant solubles le problème (53) l'est également. L'estimation à priori (47) appliquée à $z(x)$ donne

$$\|z\|_1^2 \leqslant M_3\{\|\psi\|_{-1}^2 + |\psi(0)|^2 + |\psi(l)|^2 + (z, 1)_{\bar{\omega}}^2\}. \tag{54}$$

Or on a déjà démontré que $\psi(x) = 0(h^2)$ et en vertu de (53)

$$(z, 1)_{\bar{\omega}} = Q - (u, 1)_{\bar{\omega}} = \int_0^l u(x)\,dx - (u, 1)_{\bar{\omega}} = O(h^2),$$

donc (54) entraîne que $\| z \|_1 = O(h^2)$. Ce qui démontre la convergence du schéma discret (44), (51), (52).

4. Premier problème aux limites pour une équation d'ordre quatre en dimension un. Voyons maintenant les schémas discrets approchant les problèmes aux limites pour une équation différentielle ordinaire d'ordre quatre. Soit donné sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant l$ un réseau régulier $\bar{\omega}$ de pas h. Considérons sur ce réseau le problème suivant :

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega}, \tag{55}$$

$$\begin{gathered} y(0) = w_0, \quad y_x - \frac{h}{2} y_{xx} + \frac{h^2}{2} y_{xxx}|_{x=0} = \frac{h^3}{2} \varphi(h) + w_0', \\ y_{\bar{x}} + \frac{h}{2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{h^2}{2} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = -\frac{h^3}{3} \varphi(l-h) + w_1', \quad y(l) = w_1. \end{gathered} \tag{56}$$

On a montré au pt. 4 § 6 chap. IV que le problème (55), (56) approchait avec une erreur $O(h^2)$ le problème

$$\begin{gathered} w^{\mathrm{IV}} = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \\ w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_0', \quad w(l) = w_1, \quad w'(l) = w_1'. \end{gathered} \tag{57}$$

Etudions maintenant la solubilité du problème (55), (56) et estimons à priori sa solution. Multiplions l'équation (55) par $y(x)\,h$ et sommons l'expression obtenue sur le réseau $\overset{\circ}{\omega}$:

$$(y_{\bar{x}x\bar{x}x}, y)_{\overset{\circ}{\omega}} = (\varphi, y)_{\overset{\circ}{\omega}}.$$

Transformons le premier membre à l'aide de la formule de Green (14) § 1. Il vient

$$(y_{\bar{x}x}^2, 1)_\omega + [y_{\bar{x}x\bar{x}} y - y_{\bar{x}x} y_x]_{N-1} - [y_{\bar{x}xx} y - y_{\bar{x}x} y_{\bar{x}}]_1 = (\varphi, y)_{\overset{\circ}{\omega}}. \tag{58}$$

Servons-nous des conditions aux limites (56) pour transformer le premier membre de (58). Comme $y_1 = y_0 + h y_{x,0}$, $y_{N-1} = y_N - h y_{\bar{x},N}$ alors

$$[y_{\bar{x}xx} y - y_{\bar{x}x} y_{\bar{x}}]_1 = -y_{xxx} y|_{x=0} + y_x (y_{xx} - h y_{xxx})|_{x=0},$$

$$[y_{\bar{x}x\bar{x}} y - y_{\bar{x}x} y_x|_{N-1} = y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} - y_{\bar{x}} (y_{\bar{x}\bar{x}} + h y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})|_{x=l},$$

en vertu de (56) il vient

$$-[y_{\bar{x}xx} y - y_{\bar{x}x} y_x]_1 = -y_{xxx,0} w_0 + \frac{2}{h} y_{x,0}^2 - h\varphi(h) y(h) + \\ + h\varphi(h) w_0 - \frac{2}{h} w_0' y_{x,0},$$

$$[y_{\bar{x}x\bar{x}} y - y_{\bar{x}x} y_x]_{N-1} = \\ = y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x},N} w_1 + \frac{2}{h} y_{\bar{x},N}^2 - h\varphi(l-h) y(l-h) + h\varphi(l-h) w_1 - \frac{2}{h} y_{\bar{x},N} w_1'.$$

En portant ces expressions dans (58), on trouve

$$(y_{\bar{x}x}^2, 1)_\omega + \frac{2}{h}(y_{\bar{x},0}^2 + y_{\bar{x},N}^2) =$$

$$= (\varphi, y)_\omega + \frac{2}{h}(y_{x,0}w_0' + y_{\bar{x},N}w_1') - h[\varphi(h)w_0 - \varphi(l-h)w_1]. \quad (59)$$

Soit $y(x)$ une solution du problème homogène (55), (56) ($\varphi \equiv 0$, $w_0 = w_1 = w_0' = w_1' = 0$). De (59) il suit que $(y_{\bar{x}x}^2, 1)_\omega = 0$, $y_{\bar{x},0}^2 = 0$, $y_{\bar{x},N}^2 = 0$. Or $(y_{\bar{x}x}^2, 1) = 0$ si seulement $y(x) = ax + b$, où a et b sont des constantes. Les relations $y_{\bar{x},0}^2 = 0$ et $y_{\bar{x},N}^2 = 0$ entraînent que $a = 0$, i.e. $y(x) = \text{const}$, $x \in \bar{\omega}$. Comme par hypothèse $y_0 = y_N = 0$, il vient $y(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\omega}$. Donc $y(x) \equiv 0$ est l'unique solution du problème homogène (55), (56), ce qui entraîne que le problème (55), (56) admet une solution et une seule quels que soient $\varphi(x)$, w_0, w_1, w_0', w_1'.

Estimons à priori la solution du problème (55), (56). Ecrivons-la sous la forme $y(x) \equiv \bar{y}(x) + \mathring{y}(x)$, où $\bar{y}(x)$ est solution de l'équation homogène avec les conditions aux limites non homogènes

$$\bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = 0, \quad x \in \mathring{\omega}, \quad \bar{y}_0 = w_0, \quad \bar{y}_0 = w_0', \quad \bar{y}_{\bar{x},N} = w_1', \quad \bar{y}_N = w_1, \quad (60)$$

et $\mathring{y}(x)$ solution du problème suivant :

$$\mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi, \quad x \in \mathring{\omega}, \quad \mathring{y}_0 = \mathring{y}_N = 0,$$

$$\mathring{y}_x - \frac{h}{2}\mathring{y}_{xx} + \frac{h^2}{2}\mathring{y}_{xxx}|_{x=0} = \frac{h^3}{2}\varphi(h) + \frac{h}{2}(\bar{y}_{xx} - h\bar{y}_{xxx})|_{x=0}, \quad (61)$$

$$\mathring{y}_{\bar{x}} + \frac{h}{2}y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{h^2}{2}\mathring{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = -\frac{h^3}{2}\varphi(l-h) - \frac{h}{2}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + hy_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})|_{x=l}.$$

Pour les fonctions discrètes définies sur $\bar{\omega}$, introduisons la norme

$$\|v\|_2^2 \equiv \|v\|_{W_2^2\bar{\omega}}^2 \equiv \|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_0^2 + \|v\|_0^2, \quad \text{où} \quad \|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_0^2 \equiv \|v\|_{2,0}^2 \equiv (v_{\bar{x}x}, v_{\bar{x}x})_\omega.$$

S'agissant de la solution du problème (61), on trouve en vertu de l'identité (59)

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}^2 + \frac{2}{h}(\mathring{y}_{x,0}^2 + \mathring{y}_{\bar{x},N}^2) =$$

$$= (\varphi, \mathring{y})_\omega + \mathring{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx} - h\bar{y}_{xxx})_0 - \mathring{y}_{\bar{x},N}(\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})_N. \quad (62)$$

Estimons le second membre de cette expression. Comme

$$(\bar{y}_{xx} - h\bar{y}_{xxx})_0 = 2\bar{y}_{\bar{x}x}(h) - \bar{y}_{\bar{x}x}(2h),$$

en appliquant deux fois ε-inégalité (16) § 1, on aura

$$|\overset{\circ}{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0|\leqslant 2|\overset{\circ}{y}_{x,0}\bar{y}_{\bar{x}x,1}|+|\overset{\circ}{y}_{x,0}\bar{y}_{\bar{x}x,2}|\leqslant$$
$$\leqslant(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\overset{\circ}{y}{}^2_{x,0}+\frac{1}{4\varepsilon_1}4\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\frac{1}{4\varepsilon_2}\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h).$$

Posons $\varepsilon_1+\varepsilon_2=2/h$ et égalons les coefficients en $\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)$ et $\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h)$, i.e. posons $1/\varepsilon_1=1/4\varepsilon_2$. La résolution de ce système donne $\varepsilon_1=$ $=4\varepsilon_2=8/h$. Donc

$$|\overset{\circ}{y}_{x,0}(\bar{y}_{xx}-h\bar{y}_{xxx})_0|\leqslant\frac{2}{h}\overset{\circ}{y}{}^2_{x,0}+\frac{5}{8}h[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(2h)].$$

On établit de façon analogue la majoration

$$|\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N}|(\bar{y}_{\bar{x}x}+h\bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}})_N|\leqslant\frac{2}{h}\overset{\circ}{y}{}^2_{x,N}+\frac{5}{8}h[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-2h)].$$

En portant ces majorations dans (62), il vient pour $h\leqslant l/5$ (i.e. pour $2h\neq l-2h$)

$$\|\overset{\circ}{y}\|^2_{2,0}\leqslant|(\varphi,\overset{\circ}{y})_\omega|+\frac{5}{8}h[\bar{y}^2_{\bar{x}x}(h)+\bar{y}_{\bar{x}x}(2h)+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-2h)+$$
$$+\bar{y}^2_{\bar{x}x}(l-h)]\leqslant|(\varphi,\overset{\circ}{y})_\omega|+\frac{5}{8}\|\bar{y}\|^2_{2,0}. \qquad (63)$$

Estimons le premier terme du second membre à l'aide de l'inégalité de Cauchy (15) et de ε-inégalité (16) § 1 :

$$|(\varphi,\overset{\circ}{y})_\omega|\leqslant\varepsilon\|\overset{\circ}{y}\|^2_0+\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|^2_0. \qquad (64)$$

Au § 5 (lemme 5) on montrera que relativement aux fonctions discrètes données sur le réseau $\bar{\omega}$ et nulles pour $x=0$ et $x=l$, on a l'inégalité

$$\|v_{\bar{x}x}\|^2_0\geqslant M_6\|v\|^2_0,\quad M_0=\text{const}>0. \qquad (65)$$

En portant (65) dans (64) et le résultat obtenu dans (63), et en supposant que $\varepsilon=(2M_6)^{-1}$, on obtient

$$\|\overset{\circ}{y}\|^2_{2,0}\leqslant M_6\|\varphi\|^2_0+\frac{5}{4}\|\bar{y}\|^2_{2,0}. \qquad (66)$$

Estimons maintenant la solution du problème (60). En suivant la même marche on établit que la solution du problème (60) s'écrit

$$(x)=w_0+\frac{w_1-w_0}{l}x+\frac{w_0-w_1+lw_0'+h(w_1'-w_0')}{l(l-h)(l-2h)}x(l-x)^2+$$
$$+\frac{w_1-w_0-lw_1'+h(w_1'-w_0')}{l(l-h)(l-2h)}x^2(l-x),\quad x\in\bar{\omega}. \qquad (67)$$

Majorons $\bar{y}_{\bar{x}x}(x)$

$$\|\bar{y}_{\bar{x}x}\|_{C(\omega)} \leqslant \frac{2}{l(l-h)} \{3(|w_0|+|w_1|)+2l(|w_0'|+|w_1'|)\}$$

donc pour $h \leqslant l/5$

$$\|\bar{y}\|^2_{2,\omega} \leqslant \frac{5}{l^3} \{3(|w_0|+|w_1|)+2l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2. \tag{68}$$

Portant cette majoration dans (66) et tenant compte de (65) on obtient une estimation de la fonction $\overset{\circ}{y}$ relativement à la norme de $W_2^2(\bar{\omega})$:

$$\|\overset{\circ}{y}\|_2^2 \leqslant (1+M_6)\|\varphi\|_0^2 + \\ + \frac{25}{4}\frac{1+M_6}{M_6 l^3}\{3(|w_0|+|w_1|)+2l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2.$$

Estimons la fonction $\bar{y}(x)$ relativement à la norme de $W_2^2(\bar{\omega})$. De (67) il vient

$$\|\bar{y}\|_0^2 \leqslant l\{2(|w_0|+|w_1|)+l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2$$

Cette inégalité et l'inégalité (68) entraînent

$$\|\bar{y}\|_2^2 \leqslant \frac{5}{l^3}\{3(|w_0|+|w_1|)+2l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2 + \\ + l\{2(|w_0|+|w_1|)+l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2.$$

Reste à majorer la fonction $y(x)$ qui est égale à la somme des fonctions $\overset{\circ}{y}(x)$ et $\bar{y}(x)$. On obtient en définitive la majoration à priori cherchée:

$$\|y\|_2^2 \leqslant 2(\|\overset{\circ}{y}\|_2^2+\|\bar{y}\|_2^2) \leqslant \\ \leqslant 2(1+M_6)\|\varphi\|_0^2 + l\{2(|w_0|+|w_1|)+l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2 + \\ + \frac{25+45M_6}{4M_6 l^3}\{3(|w_0|+|w_1|)+2l(|w_0'|+|w_1'|)\}^2.$$

On a évalué la solution du problème (55), (56). Cette estimation et celle de l'erreur d'approximation (cf. pt. 4 § 6 chap IV) du problème (57) par le problème (55), (56) entraînent la convergence de la solution du problème (55), (56) avec une vitesse de $O(h^2)$.

5. Modèle discret d'une tige élastique à support. Soit à estimer à priori le problème suivant:

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega}, \tag{69}$$

$$y(0) = w_0, \quad -y_{xx} + hy_{xxx}|_{x=0} = \mathscr{M}_0 + h^2\varphi(h),$$
$$y_{\bar{x}x} + hy_{\bar{x}x\bar{x}}|_{x=l} = \mathscr{M}_1 - h^2\varphi(l-h), \quad y(l) = u_1, \tag{70}$$

Ecrivons la solution de ce problème sous la forme $y(x) = \overset{\circ}{y}(x) + \bar{y}(x)$, $x \in \bar{\omega}$ où $\bar{y}(x)$ est solution du problème

$$\bar{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = 0, \quad x \in \overset{\circ}{\omega},$$

$$\bar{y}(0) = u_0, \quad -\bar{y}_{xx} + h\bar{y}_{xxx}|_{x=0} = 0, \quad \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + h\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = 0, \quad \bar{y}(l) = u_1, \tag{71}$$

et $\overset{\circ}{y}(x)$ définie à partir des équations

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ \overset{\circ}{y}(0) = 0, \quad -\overset{\circ}{y}_{xx} + h\overset{\circ}{y}_{xxx}|_{x=0} = \mathscr{M}_0 + h^2\varphi(h), \\ -\overset{\circ}{y}_{\bar{x}\bar{x}} - h\overset{\circ}{y}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}|_{x=l} = \mathscr{M}_1 + h^2\varphi(l-h), \quad \overset{\circ}{y}(l) = 0. \end{gathered} \tag{72}$$

Multiplions l'équation du problème (72) par $\overset{\circ}{y}(x)\,h$ et sommons l'expression obtenue sur le réseau $\overset{\circ}{\omega}$. Transformant l'expression obtenue à l'aide de la formule de Green (14) § 1 et tenant compte des conditions aux limites (72), il vient que

$$\|\overset{\circ}{y}\|^2_{2,0} = (\varphi, \overset{\circ}{y})_\omega + \mathscr{M}_0\overset{\circ}{y}_{x,0} + \mathscr{M}_1\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N} \tag{73}$$

Estimons les termes du second membre. En vertu de l'inégalité de Cauchy (15) § 1

$$|(\varphi, y)_\omega| \leqslant \|\varphi\|_0 \|\overset{\circ}{y}\|_0.$$

L'inégalité (65) entraîne $(0 < \sigma < 1)$

$$\|\overset{\circ}{y}\|_0 \leqslant \left[\sigma\|\overset{\circ}{y}\|_0^2 + \frac{1-\sigma}{M_0}\|\overset{\circ}{y}\|^2_{2,0}\right]^{1/2},$$

En choisissant le paramètre σ à partir de la condition d'égalité des coefficients en $\|\overset{\circ}{y}\|_0^2$ et $\|\overset{\circ}{y}\|^2_{2,0}$, il vient $\|\overset{\circ}{y}\|_0 \leqslant \sqrt{(1+M_6)/M_6}\,\|\overset{\circ}{y}\|_2$, donc

$$|(\varphi, y)_\omega| \leqslant \sqrt{(1+M_6)/M_6}\,\|\overset{\circ}{y}\|_2 \|\varphi\|_0.$$

Au § 4 de ce chapitre on montrera (théorème 3) que pour toute fonction discrète $v(x)$ définie sur un réseau régulier $\bar{\omega}$, on a

$$\|v_{\bar{x}}\|^2_{C(\omega+)} \leqslant M\|v\|_2^2, \quad M = \text{const} > 0, \tag{74}$$

En se servant de cette inégalité, on établit que

$$|\mathscr{M}_0\overset{\circ}{y}_{x,0} + \mathscr{M}_1\overset{\circ}{y}_{\bar{x},N}| \leqslant (|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\sqrt{M}\,\|\overset{\circ}{y}\|_2.$$

De là et de (73) il suit

$$\|\overset{\circ}{y}\|^2_{2,0} \leqslant \left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\|\varphi\|_0 + \sqrt{M}(|\mathscr{M}_0| + |\mathscr{M}_1|)\right\}\|\overset{\circ}{y}\|_2^2.$$

En vertu de (65) il vient

$$\|\overset{\circ}{y}\|_{2,0}^2 \geqslant \frac{M_6}{1+M_6}\|\overset{\circ}{y}\|_2^2.$$

Portant cette estimation dans le premier membre de l'inégalité précédente, on obtient la majoration à priori pour la solution du problème (72):

$$\|\overset{\circ}{y}\|_2 \leqslant \frac{1+M_6}{M_6}\left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\|\varphi\|_0 + \sqrt{M}\,(|\mathscr{M}_0|+|\mathscr{M}_1|)\right\}.$$

Evaluons la solution du problème (71). Il est évident que

$$\bar{y}(x) = w_0 + \frac{w_1 - w_0}{l}x,$$

donc

$$\|\bar{y}\|_2 = \|\bar{y}\|_0 \leqslant \sqrt{l}\,\|\bar{y}\|_C \leqslant \sqrt{l}\,(|w_0|+|w_1|)$$

et

$$\|y\|_2 \leqslant \|\overset{\circ}{y}\|_2 + \|\bar{y}\|_2 \leqslant \frac{1+M_6}{M_6}\left\{\sqrt{\frac{1+M_6}{M_6}}\|\varphi_0\| + \sqrt{M}(|\mathscr{M}_0|+|\mathscr{M}_1|)\right\} + \\ + \sqrt{l}\,(|w_0|+|w_1|).$$

On a estimé la solution du problème (69), (70). En utilisant les résultats du pt. 4 § 6 chap. IV, on établit sans peine que le problème (69), (70) approche avec une erreur de $O(h^2)$ le problème de la flexion d'une tige s'articulant sur un support, i.e. le problème

$$\begin{gathered} w^{\mathrm{IV}} = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \\ w(0) = w_0, \quad -w''(0) = \mathscr{M}_0, \quad w''(l) = \mathscr{M}_1, \quad w'(l) = w_1, \end{gathered} \tag{75}$$

Ce fait et la majoration à priori entraînent la convergence de la solution du problème (69), (70) vers celle du problème (75) à la vitesse de $O(h^2)$.

6. Modèle discret d'une tige élastique ayant une extrémité libre. Estimons à priori le problème

$$\begin{gathered} y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega}, \\ y(0) = 0, \quad y_x - \frac{h}{2}y_{xx} + \frac{h^2}{2}y_{xxx}\big|_{x=0} = \frac{h^3}{2}\varphi(h), \\ y_{\bar{x}\bar{x},N} = \mathscr{M} + hQ + \frac{h^2}{2}\varphi(l), \quad -y_{\bar{x}x\bar{x},N} = Q + h\left[\varphi(l-h) + \frac{1}{2}\varphi(l)\right], \end{gathered} \tag{76}$$

qui simule sur le réseau $\bar{\omega}$ le problème de la flexion d'une tige élastique dont l'extrémité gauche ($x = 0$) est rigidement fixée, et l'extrémité droite soumise à l'action d'une force. Mettons la solution du problème (76) sous la forme d'une somme de deux fonctions $\overset{\circ}{y}(x)$

et $y(x)$, où $\dot{y}(x) = \left[\frac{h}{2}(\mathring{y}_{xx,0} - h\mathring{y}_{xxx,0}) + \frac{h^3}{2}\varphi(h)\right]x$ et $\mathring{y}(x)$ est solution du problème suivant :

$$\mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x \in \mathring{\omega}, \tag{77}$$

$$\mathring{y}(0) = 0, \quad y_{x,0} = 0, \tag{78}$$

$$y_{\bar{x}x,N} = \mathscr{M} + hQ + \frac{h^2}{2}\varphi(l), - \mathring{y}_{\bar{x}x\bar{x}} = Q + h\left[\varphi(l-h) + \frac{1}{2}\varphi(l)\right].$$

Multiplions l'équation (77) par $\mathring{y}(x)\,h$ et sommons cette expression sur le réseau $\mathring{\omega}$. Transformant l'identité obtenue à l'aide de la formule de Green (14) § 1 et tenant compte des conditions aux limites (78), on obtient toutes réductions faites

$$\|\mathring{y}\|_{2,0} = (\varphi, \mathring{y})_{\bar{\omega}} + Q\mathring{y}_N + \mathscr{M}\mathring{y}_{\bar{x},N}. \tag{79}$$

Estimons le second membre. En vertu de l'inégalité de Cauchy $|(\varphi, \mathring{y})_{\bar{\omega}}| \leqslant \|\varphi\|_0 \|\mathring{y}\|_0$. Au § 5 de ce chapitre on montrera (lemme 6) que pour toute fonction discrète $v(x)$ donnée sur $\bar{\omega}$ et vérifiant les conditions $v_0 = v_1 = 0$, on a

$$\|v\|_0^2 \leqslant \frac{l^4}{12}\|v\|_{2,0}^2, \tag{80}$$

de sorte que $\|v\|_0^2 \leqslant l^4/(12 + l^4)\|v\|_2^2$. Donc

$$|(\varphi, \mathring{y})_{\bar{\omega}}| \leqslant \frac{l^2}{\sqrt{12 + l^4}}\|\varphi\|_0 \|\mathring{y}\|_2.$$

En vertu de la même inégalité (80)

$$\|\mathring{y}\|_{2,0}^2 \geqslant \frac{12}{12 + l^4}\|\mathring{y}\|_0^2.$$

En portant ces estimations dans (79), on trouve

$$\|\mathring{y}\|_2^2 \leqslant \frac{12 + l^4}{12}\left[\frac{l^2}{\sqrt{12 + l^4}}\|\varphi\|_0 \|\mathring{y}\|_2 + |Q|\,|\mathring{y}_N| + |\mathscr{M}|\,|\mathring{y}_{\bar{x},N}|\right]. \tag{81}$$

Au § 4 on montrera (théorème 3) que pour toute fonction discrète $v(x)$ donnée sur $\bar{\omega}$, on a l'inégalité

$$\|v\|_C^2 \leqslant \overline{M}\|v\|_2^2, \quad \overline{M} = \text{const} > 0, \tag{82}$$

qui, avec l'inégalité (74) entraînent

$$|Q|\,|\mathring{y}_N| + |\mathscr{M}|\,|\mathring{y}_{\bar{x},N}| \leqslant (\overline{M}|Q| + M|\mathscr{M}|)\|\mathring{y}\|_2.$$

De cette inégalité et de l'inégalité (81) il résulte

$$\|\overset{\circ}{y}\|_2 \leqslant \frac{12+l^4}{12}\left[\frac{l^2}{\sqrt{12+l^4}}\|\varphi\|_0 + \overline{M}|Q| + M|\mathscr{M}|\right]. \tag{83}$$

Estimons maintenant la fonction $\bar{y}(x)$. Il est évident que

$$\|\bar{y}\|_2 \leqslant l^{3/2}\left[\left|\frac{h}{2}(\overset{\circ}{y}_{xx,0} - h\overset{\circ}{y}_{xxx,0})\right| + \frac{h^3}{2}|\varphi(h)|\right].$$

Or

$$\frac{h}{2}|\overset{\circ}{y}_{xx,0} - h\overset{\circ}{y}_{xxx,0}| = \frac{1}{2}|-2y_{\bar{x},1} + 3y_{\bar{x},2} - y_{\bar{x},3}|$$

et en vertu de (74) $h/2|\overset{\circ}{y}_{xx,0} - h\overset{\circ}{y}_{xxx,0}| \leqslant 3M\|\overset{\circ}{y}\|_2$. D'autre part

$$\frac{h^3}{2}|\varphi(h)| = \frac{h^{5/2}}{2}[h\varphi^2(h)]^{1/2} \leqslant \frac{h^{5/2}}{2}\|\varphi\|_0 \leqslant \frac{l^{5/2}}{2}\|\varphi\|_0.$$

Compte tenu de ces inégalités, on obtient pour $\|\bar{y}\|_2$ la majoration $\|\bar{y}\|_2 \leqslant 3Ml^{3/2}\|\overset{\circ}{y}\|_2 + l^4/2\|\varphi\|_0$. En portant ici (83) et en utilisant l'inégalité du triangle pour estimer la norme $y(x) = \overset{\circ}{y} + \bar{y}$ on déduit : $\|y\|_2 \leqslant M(\|\varphi\|_0 + |\mathscr{M}| + |Q|)$, $M = \text{const} > 0$.

Comme toujours cette estimation à priori entraîne la convergence de la solution du problème (76) vers la solution du problème correspondant posé pour l'équation différentielle, mais nous omettrons ce point.

7. Modèle discret d'un système de deux tiges assemblées par une articulation parfaite. Voyons comment il faut étudier le problème discret si sont données des conditions de conjugaison. Soit $\bar{\omega} = \{x = x_i \mid x_i = ih,\ i = 0, \pm 1, \ldots, \pm N,\ h = l/N\}$ un réseau régulier de pas h donné sur l'intervalle $[-l, l]$. Désignons par $\bar{\omega}_g$ le sous-ensemble des nœuds du réseau $\bar{\omega}$ compris dans l'intervalle $[-l, 0]$, i. e. $\bar{\omega}_g + \{x_i \mid i = -N, -N+1, \ldots, 0\}$. Notons ω_g, $\overset{\circ}{\omega}_g$, ω_g^+, ${}^+\omega_g$ les sous-ensembles de $\bar{\omega}_g$ définis à l'instar de ω, $\overset{\circ}{\omega}$, etc. (cf. pt. 1 § 1). Soient $\bar{\omega}_d$, ω_d, etc. les sous-ensembles correspondants de $\bar{\omega}$ contenus dans $[0, l]$.

Considérons sur le réseau $\bar{\omega}$ le problème suivant

$$y_{\bar{x}x\bar{x}x} = \varphi(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega}_g \cup \overset{\circ}{\omega}_d, \tag{84}$$

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x} + hy_{\bar{x}x\bar{x}} &= \mathscr{M}^- - h^2\varphi(-h), & x &= 0, \\ -y_{xx} + hy_{xxx} &= \mathscr{M}^+ + h^2\varphi(h), & x &= 0, \\ y_{xxx} - y_{\bar{x}x\bar{x}} &= \bar{\varphi} + 3h\varphi(0) + h^3\varphi_{\bar{x}x}(0), & x &= 0, \end{aligned} \tag{85}$$

$$y(-l)=0, \quad y_x-\frac{h}{2}y_{xx}+\frac{h^2}{2}y_{xxx}\Big|_{x=-l}=\frac{h^3}{2}\varphi(-l+h),$$
$$y_{\bar{x}}+\frac{h}{2}y_{\bar{x}\bar{x}}+\frac{h^2}{2}y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\Big|_{x=l}=-\frac{h^3}{2}\varphi(l-h), \quad y(l)=0. \tag{86}$$

Il est aisé de vérifier que le problème (84), (85), (86) approche avec une erreur de $O(h^2)$ sur le réseau $\bar{\omega}$ le problème de la flexion d'un système de deux tiges assemblées par une articulation parfaite au point $x=0$ et rigidement fixées en $x=-l$ et $x=l$:

$$w^{\mathrm{IV}}=\varphi(x), \quad -l<x<0, \quad 0<x<l,$$
$$[w]|_{x=0}=0, \; w''(-0)=\mathcal{M}^-, \; -w''(+0)=\mathcal{M}^+, \; [w'']|_{x=0}=\bar{\varphi}, \tag{87}$$
$$w(-l)=w'(-l)=w'(l)=w(l)=0.$$

Au chapitre IV on a établi les expressions (85) qui approchent les conditions de conjugaison du problème (87) (cf. formules (20) et (19) du § 6 pour $\alpha=\beta=0$).

Estimons a priori la solution du problème (84), (85), (86). Multiplions les équations (84) par $y(x)\,h$, sommons-les sur les réseaux $\overset{\circ}{\omega}_g$ et $\overset{\circ}{\omega}_d$ et additionnons les expressions obtenues. En appliquant ensuite la formule de Green discrète (14) § 1 on obtient

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2}(\omega_g)+\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2}\omega_d+(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}y^{(-1)}-y_{\bar{x}\bar{x}}y_{\bar{x}})_0-(y_{xxx}y^{(+1)}-y_{xx}y_x)_{-l}+$$
$$+(y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}y^{(-1)}-y_{\bar{x}\bar{x}}y_{\bar{x}})_l-(y_{xxx}y^{(+1)}-y_{xx}y_x)_0=(\varphi,y)_{\overset{\circ}{\omega}_g}+(\varphi,y)_{\overset{\circ}{\omega}_d}.$$

En transformant le premier membre de l'identité obtenue à l'aide des conditions de conjugaison (85) et des conditions aux limites (86) on obtient l'identité de l'énergie suivante:

$$y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_g)}+\|y_{\bar{x}x}\|_{L_2(\omega_d)}+\frac{2}{h}(y_{\bar{x}}^2(-l)+y_{\bar{x}}^2(l))=$$
$$=(\varphi,y)_\omega+\bar{\varphi}y(0)+\mathcal{M}^-y_{\bar{x}}(0)+\mathcal{M}^+y_x(0). \tag{88}$$

Majorons le second membre:

$$|(\varphi,y)_\omega+\bar{\varphi}y(0)+\mathcal{M}^-y_{\bar{x}}(0)+\mathcal{M}^+y_x(0)|\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi\|_0\|y\|_0+|\bar{\varphi}||y(0)|+|\mathcal{M}^-||y_{\bar{x}}(0)|+|\mathcal{M}^+||y_x(0)|\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi\|_0\|y\|_0+|\bar{\varphi}|\|y\|_{C(\bar{\omega})}+|\mathcal{M}^-|\|y_{\bar{x}}\|_{C(\omega_g^+)}+|\mathcal{M}^+|\|y_{\bar{x}}\|_{(C\omega_d^+)}.$$

En utilisant ε-inégalité pour les majorations ultérieures et en tenant compte des expressions (74), (82), on obtient

$$|(\varphi,y_\omega)+\bar{\varphi}y(0)+\mathcal{M}^-y_{\bar{x}}(0)+\mathcal{M}^+y_x(0)|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon(1+M+\bar{M})(\|y\|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_g)}+\|y\|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_d)})+$$
$$+\frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_0^2+|\bar{\varphi}|^2+|\mathcal{M}^-|^2+|\mathcal{M}^+|^2) \tag{89}$$

Minorons le premier membre de (88). En faisant $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_0 = 2/h$ $\bar{\omega} = {}^+\omega_g$ dans le lemme 2 § 5, on obtient pour la fonction $v(x) = y_x(x)$ définie sur ${}^+\omega_g$:

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_g)} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{1}{l(l-h)} \sum_{\omega_g^+} y_{\bar{x}}^2 h = \frac{1}{l(l-h)} \|y_{\bar{x}}\|^2_{L_2(\omega_g^+)}. \quad (90)$$

Comme $y(-l) = 0$, en posant $\varkappa_1 = 0$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_g$ dans le lemme 2 § 5, on s'assure que $\|y_{\bar{x}}\|^2_{L_2(\omega_g^+)} \geqslant \frac{2}{l^2} \|y\|^2_{L_2(\bar{\omega}_g)}$ lorsque $\varkappa_0 \to \infty$. Cette minoration et (90) entraînent

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_g)} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{2}{l^3(l-h)} \|y\|^2_{L_2(\bar{\omega}_g)}.$$

En supposant que $h \leqslant l/2$, on aura

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_d)} + 2h^{-1} y_x^2(-l) \geqslant 4l^{-4} \|y\|^2_{L_2\bar{\omega}_g}.$$

Ce qui entraîne

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_g)} + \frac{2}{h} y_x^2(-l) \geqslant \frac{4}{4+l^4} \|y\|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_g)}. \quad (91)$$

On démontre de façon analogue que

$$\|y_{\bar{x}x}\|^2_{L_2(\omega_d)} + \frac{2}{h} y_{\bar{x}}^2(l) \geqslant \frac{4}{4+l^4} \|y\|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_d)}. \quad (92)$$

Revenons à l'identité de l'énergie (88). En tenant compte de l'inégalité (89), (91) et (92), on déduit de (88)

$$\left[\frac{4}{4+l^4} - \varepsilon(1+M+\bar{M})\right](\|y\|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_g)} + \|y\|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_d)}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_0^2 + |\bar{\varphi}|_0^2 + |\mathscr{M}^-|^2 + |\mathscr{M}^+|^2).$$

Si l'on pose par exemple $\varepsilon = 2[(4+l^4)(1+M+\bar{M})]^{-1}$ on arrive à l'estimation à priori de la solution du problème (84), (85), (86) :

$$\|y\|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_g)} + \|y\|^2_{W_2^2(\bar{\omega}_d)} \leqslant M(\|\varphi\|_0^2 + |\bar{\varphi}|^2 + |\mathscr{M}^-|^2 + |\mathscr{M}^+|^2),$$

où $M = \text{const} > 0$.

De cette estimation à priori on déduit de façon standard l'estimation de la vitesse de convergence de la solution du problème (84), (85), (86) vers celle du problème (87).

§ 3. Problèmes discrets aux valeurs propres

Lorsqu'on obtient des estimations relatives à l'étude des schémas discrets, il est parfois nécessaire de représenter la fonction discrète au moyen des fonctions propres d'un problème discret conve-

nable. Dans ce paragraphe on étudiera les propriétés fondamentales des problèmes discrets aux valeurs propres les plus simples. On traitera le premier et le second problème pour un opérateur aux différences secondes et pour l'approximation sur un stencil de cinq points de l'opérateur de Laplace dans un rectangle. On supposera que le réseau est régulier.

1. Premier problème aux limites aux valeurs propres pour un opérateur aux différences secondes. On sait que la recherche des fonctions propres et des valeurs propres du problème

$$u''(x) + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u(l) = 0 \tag{1}$$

se ramène à la recherche de valeurs du paramètre λ (valeurs propres) telles que le problème homogène (1) admette des solutions $u(x)$ non triviales (fonctions propres).

L'analogue discret du problème (1) se formule comme suit. Soit donné sur l'intervalle $[0, l]$ un réseau régulier $\bar{\omega}$ de pas $h = l/N$. Considérons sur $\bar{\omega}$ l'approximation discrète du problème (1):

$$y_{\bar{x}x} + \lambda_y = 0, \quad x \in \omega, \quad y_0 = y_N = 0. \tag{2}$$

On demande de trouver des valeurs du paramètre λ (*valeurs propres*) telles que le problème (2) admette des solutions $y(x)$ non triviales (*fonctions propres*).

Déterminons la forme de la solution générale du problème (2). Récrivons l'équation (2) sous la forme:

$$y_{j-1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) y_j + y_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Posons

$$1 - \frac{h^2\lambda}{2} = \cos \alpha h. \tag{4}$$

L'équation caractéristique de (3) est $q^2 - 2\cos \alpha hq + 1 = 0$. Les racines de cette équation sont $q_1 = e^{i\alpha h}$, $q_2 = e^{-i\alpha h}$, donc la solution générale de l'équation (2) est

$$y(x) = C_1 e^{i\alpha x} + C_2 e^{-i\alpha x} = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x.$$

Déterminons les constantes c_1 et c_2 à partir des conditions aux limites (2):

$$y(0) = c_2 = 0, \quad y(l) = c_1 \sin \alpha l = 0. \tag{5}$$

Pour que la deuxième des expressions (5) ait lieu, il faut que c_1 ou $\sin \alpha l$ soit nul. Or c_1 ne peut être nul, car $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Donc $\sin \alpha l = 0$, et $\alpha = k\pi/l$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Donc les solutions du problème (2) sont les fonctions

$$\mu_k(x) = c \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

De (4) il résulte que les valeurs propres du problème (2) sont à chercher parmi les nombres

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

On remarquera que zéro ne peut pas être valeur propre du problème (2), car il lui correspond une solution identiquement nulle. Parmi les nombres restants, seuls $(N-1)$ sont distincts entre eux, par exemple, λ_k pour $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Ce sont les valeurs propres du problème (2).

Montrons maintenant que les fonctions propres $\mu_k(x)$ définies par l'expression (6) pour $k = 1, 2, \ldots, N-1$ sont deux à deux orthogonales. En effet, supposons qu'à la valeur propre λ_k est associée la fonction propre $\mu_k(x)$ et à λ_m la fonction propre $\mu_m(x)$. Supposons que $k \neq m$ et $1 \leqslant k, m \leqslant N-1$. Multiplions scalairement l'expression

$$\mu_{h\bar{x}x} + \lambda_k\mu_k = 0, \quad x \in \omega,$$

par $\mu_m(x)$ et l'expression

$$\mu_{m\bar{x}x} + \lambda_m\mu_m = 0, \quad x \in \omega,$$

par $\mu_k(x)$ et ôtons la seconde de la première. Il vient

$$0 = (\mu_{h\bar{x}x}, \mu_m)_\omega - (\mu_{m\bar{x}x}, \mu_k)_\omega + (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega.$$

En appliquant la première formule de Green (12) § 1 aux deux premiers termes du second membre, on obtient

$$0 = -(\mu_{h\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega+} + (\mu_{m\bar{x}}, \mu_{k\bar{x}})_{\omega+} + (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega =$$
$$= (\lambda_k - \lambda_m)(\mu_k, \mu_m)_\omega.$$

Or pour $k \neq m$, $1 \leqslant k, m \leqslant N-1$, $\lambda_k \neq \lambda_m$, donc

$$(\mu_k, \mu_m)_\omega = 0.$$

Donc les fonctions propres sont orthogonales. Prenons la constante c de (6) telle que les fonctions propres aient une norme égale à l'unité Des calculs directs montrent que

$$(\mu_k, \mu_k)_\omega = c^2 l/2.$$

En faisant $c = \sqrt{2/l}$, on obtient $\|\mu_k\|_0 = 1$.

Calculons les différences regressives pour les fonctions propres (6) pour $c = \sqrt{2/l}$:

$$[\mu_k(x)]_{\bar{x}} = \sqrt{2/l}\,\frac{\sin(k\pi x/l) - \sin(k\pi(k-h)/l}{h} =$$

$$= \sqrt{2/l}\,\frac{2\sin(k\pi h/(2l))}{h}\cos\frac{k\pi(x-h/2)}{l} = \sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos(k\pi(x-h/2)/l).$$

En multipliant scalairement l'équation (7) par $\mu_m(x)$ et en transformant l'expression obtenue à l'aide de la première formule de Green (12) § 1, il vient

$$0=(\mu_{h\bar{x}x}, \mu_m)_\omega + \lambda_h(\mu_h, \mu_m)_\omega = -(\mu_{h\bar{x}}), \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} + \lambda_h(\mu_h, \mu_m)_\omega.$$

D'où il s'ensuit que pour $k \neq m$

$$(\mu_{h\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} = 0,$$

i.e. les différences des fonctions propres sont orthogonales au sens du produit scalaire $(\ ,\ )_{\omega^+}$.

Soit $f(x)$ une fonction discrète quelconque définie sur ω (ou une fonction discrète définie sur $\bar{\omega}$ et nulle pour $x=0$ et $x=l$). Développons $f(x)$ sur les fonctions propres $\{\mu_k(x)\}_1^{N-1}$, i.e. mettons $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N-1} f_k\mu_k(x), \tag{8}$$

où f_k sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$. En multipliant scalairement (8) par $\mu_m(x)$ on trouve

$$(f, \mu_m)_\omega = \sum_{k=1}^{N-1} f_k(\mu_k, \mu_m)_\omega = f_m.$$

Elevons (8) au carré et multiplions scalairement par l'unité

$$(f^2, 1)_\omega = \Big(\Big(\sum_{k=1}^{N-1} f_k\mu_k(x)\Big)^2, 1\Big) = \sum_{k,\, m=1}^{N-1} f_k f_m(\mu_k, \mu_m)_\omega = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2.$$

L'expression obtenue est l'analogue discret de l'égalité de Parseval.

Etudions plus en détail les valeurs propres λ_k du problème (2). Remarquons que la fonction $\sin\frac{k\pi n}{2l}$ est monotone croissante lorsque k varie de 1 à $N-1$. Donc $\lambda_k < \lambda_m$ pour $k < m$. On sait que pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ la fonction $(\sin\alpha)/\alpha$ vérifie l'encadrement

$$2/\pi \leqslant (\sin\alpha)/\alpha \leqslant 1.$$

Comme

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left(\frac{\sin(k\pi h/(2l))}{k\pi h/(2l)}\right)^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left(\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}\right)^2, \tag{9}$$

il vient $(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2$ et en particulier

$$\lambda_k \geqslant \lambda_1 \geqslant 4/l^2.$$

En effet on a une meilleure minoration de la première valeur propre λ_1. De (9) il vient

$$\frac{d\lambda_k}{d\alpha} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{\sin 2\alpha}{\alpha^3}(\alpha - \operatorname{tg}\alpha) < 0, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

D'où il s'ensuit que les valeurs propres décroissent lorsque le pas h croît, et comme le pas maximal du réseau ω est égal à $h_0 = l/2$ sur l'intervalle $[0, l]$ pour le problème (2), on a

$$\lambda_1(h_0) = 8/l^2 \leqslant \lambda_1(h) \leqslant \lambda_k(h).$$

Récapitulons. Pour faire ressortir l'analogie existant entre les fonctions propres et les valeurs propres du problème (1) et (2), citons parallèlement les propriétés des solutions du problème (1).

Problème 1	Problème 2	
	Fonctions propres	
$u_k(x) = \sqrt{2/l}\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$	$\mu_k(x) = \sqrt{2/l}\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$	(10)
	Valeurs propres	
$\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ $\lambda_k > \lambda_m$ pour $k > m$	$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2$, $\lambda_k > \lambda_m$ pour $k > m$, $\lambda_1 \geqslant 8/l^2$.	(11) (12)
	Orthonormalité des fonctions propres	
$\int_0^l \mu_k(x)\, u_m(x)\, dx = \delta_{k,m}$	$(\mu_k, \mu_m)_\omega = \sum_\omega \mu_k(x)\,\mu_m(x)\,h = \delta_{k,m}$.	(13)

où $\delta_{k,m}$ est le symbole de Kronecker, i.e.

$$\delta_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = m, \\ 0 & \text{pour } k \neq m. \end{cases}$$

	Dérivées (formules discrètes des fonctions propres	
$u_k'(x) = \sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos\frac{k\pi x}{l}$ $k = 1, 2, \ldots$	$\mu_{h\bar{x}} = \sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\cos\frac{k\pi(x-h/2)}{l} \equiv \equiv \sqrt{\lambda_k}\,\bar{\mu}_k(x)$ $k = 1, 2, \ldots, N-1$	
	Orthogonalité des dérivées (formules discrètes) des fonctions propres	
$\int_0^l u_k'(x)\, u_m'(x)\, dx = \lambda_k \delta_{k,m}$	$(\mu_{h\bar{x}}, \mu_{m\bar{x}})_{\omega^+} \equiv \equiv \sum_{\omega^+} \mu_{k\bar{x}}\mu_{m\bar{x}}h = \lambda_k\delta_{k,m}$.	

Complétude du système de fonctions propres

Pour une fonction quelconque $f(x) \in L_2\,]0, l[$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x),$$

où

$$f_k = \int_0^l f(x)\, u_k(x)\, dx,$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Pour une fonction discrète quelconque $f(x)$ définie sur ω

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu_k(x), \qquad (14)$$

où

$$f_k = (f, \mu_k)_\omega, \qquad (15)$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1$$

Egalité de Parseval

$$\|f\|^2_{L_2(0,\, l)} \equiv \int_0^l f^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$$

$$\|f\|^2_{L_2(\omega)} \equiv \|f\|^2_0 \equiv (f_1 f)_\omega = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 \qquad (16)$$

2. Deuxième problème aux limites aux valeurs propres pour un opérateur aux différences secondes. Considérons l'analogue discret du problème

$$u''(x) + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \quad u'(0) = u'(l) = 0.$$

Approchons les conditions aux limites avec l'erreur $O(h^2)$. Plus exactement

$$y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad x \in \omega, \quad y_{x,\,0} + \frac{h}{2}\lambda y_0 = 0, \quad y_{\bar{x},\,N} - \frac{h\lambda}{2} y_N = 0. \qquad (17)$$

On remarquera que dans le problème discret (17) les valeurs propres figurent dans les conditions aux limites alors qu'elles n'entrent pas dans celles du problème à approcher.

Soit $\overset{\circ}{\Lambda}$ un opérateur discret défini par

$$\overset{\circ}{\Lambda} v = \begin{cases} -\dfrac{2}{h} v_x, & x = 0, \\ -v_{\bar{\lambda}x}, & x \in \omega, \\ \dfrac{2}{h} v_{\bar{x}}, & x = l. \end{cases} \qquad (18)$$

Le problème (17) se récrit alors

$$\overset{\circ}{\Lambda} y = \lambda y, \quad x \in \bar{\omega}.$$

Les solutions du problème (17) et leurs propriétés s'obtiennent exactement comme pour le problème (2). On passera donc directement à la récapitulation des résultats.

1) Fonctions propres

$$\begin{aligned} &\mu_k(x) = \sqrt{2/l}\cos(k\pi x/l), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \\ &\mu_0(x) = \sqrt{1/l}, \quad \mu_N(x) = \sqrt{1/l}\cos(N\pi x/l). \end{aligned} \tag{19}$$

2) Valeurs propres

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{20}$$

$$(2k/l)^2 \leqslant \lambda_k \leqslant (k\pi/l)^2, \ k = 1, 2, \ldots, N, \tag{21}$$

$$\lambda_k > \lambda_m, \ k > m, \tag{22}$$

$$\lambda_1 \geqslant 8/l^2, \ \lambda_0 = 0. \tag{23}$$

3) Orthonormalité des fonctions propres

$$(\mu_k, \mu_m)_{\bar\omega} = \delta_{k,m}. \tag{24}$$

4) Différences des fonctions propres

$$\begin{aligned} &(\mu_k(x))_{\bar x} = -\sqrt{\lambda_k}\sqrt{2/l}\sin k\pi((x-h/2)/l) = \sqrt{\lambda_k\mu_k}, (x) \\ &k = 1, 2, \ldots, N-1, \\ &(\mu_N(x))_{\bar x} = -\sqrt{\lambda_N}\sqrt{1/l}\sin N\pi((x-h/2)/l) = \sqrt{\lambda_N\mu_N}(x). \end{aligned} \tag{25}$$

5) Orthogonalité des différences des fonctions propres

$$(\mu_{k\bar x}, \mu_{m\bar x})_{\omega^+} = \lambda_k\delta_{k,m}. \tag{26}$$

6) Les fonctions propres forment une base sur le réseau $\bar\omega$. Toute fonction discrète $f(x)$ donnée sur $\bar\omega$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k\mu_k(x), \tag{27}$$

où

$$f_k = (f, \mu_k)_{\bar\omega}, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{28}$$

sont les coefficients de Fourier de $f(x)$.

7) Egalité de Parseval

$$\|f\|^2_{L_2(\omega)} \equiv \|f\|_0^2 \equiv (f, f)_{\bar\omega} = \sum_{k=0}^{N} f_k^2. \tag{29}$$

3. Problèmes aux valeurs propres pour le laplacien discret. Soit donné un réseau régulier rectangulaire $\bar\omega = \omega_1 \times \bar\omega_2$ sur le rectangle $\bar G = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1,2\}$. Soit $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ l'ensemble des

nœuds intérieurs de ce réseau, $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ l'ensemble des nœuds frontières. Considérons sur $\bar{\omega}$ le problème aux valeurs propres suivant:

$$\Lambda y \equiv -y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} = \lambda y, \quad x \in \omega, \quad y(x) = 0 \quad x \in \gamma. \tag{30}$$

Il est aisé de voir que le problème (30) admet une séparation des variables et la solution

$$\mu_h(x) \equiv \mu_{1,k_1}(x_1)\,\mu_{2,k_2}(x_2), \quad \lambda_h = \lambda_{1,k_1} + \lambda_{2,k_2}, \tag{31}$$
$$k = (k_1, k_2), \quad k_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2,$$

où $\mu_{\alpha,k_\alpha}(x_\alpha)$ est défini par (10) pour $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $x = x_\alpha$ et $\lambda_{\alpha,k_\alpha}$ par (11) pour $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $h = h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$. Les fonctions propres (31) du problème (30) sont orthonormées, i.e.

$$(\mu_h(x), \mu_m(x))_\omega \equiv \sum_{\omega_1} h_1 \sum_{\omega_2} h_2 \cdot \mu_h(x_1, x_2)\,\mu_m(x_1, x_2) = \delta_{h,m}.$$

Considérons sur le réseau $\bar{\omega}$ un autre problème aux valeurs propres

$$\bar{\Lambda} y \equiv (\mathring{\bar{\Lambda}}_1 + \mathring{\bar{\Lambda}}_2)\, y = \lambda y, \quad x \in \bar{\omega}, \tag{32}$$

où l'opérateur $\mathring{\bar{\Lambda}}_\alpha$ est défini par (18) pour $x = x_\alpha$, $l = l_\alpha$, $h = h_\alpha$, $\omega = \omega_\alpha$. Le problème (32) est l'analogue discret du deuxième problème aux limites aux valeurs propres pour le laplacien bidimensionnel sur un rectangle. Comme (30), ce problème admet une séparation des variables et la solution suivante

$$\mu_h(x) \equiv \mu_{1,k_1}(x_1)\,\mu_{2,k_2}(x_2), \quad \lambda_h = \lambda_{1,k_1} + \lambda_{2,k_2}, \tag{33}$$
$$k = (k_1, k_2), \quad k_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

où $\mu_{\alpha,k_\alpha} x_\alpha$ sont donnés par (19) pour $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $x = x_\alpha$ et $\lambda_{\alpha,k_\alpha}$ par (20) pour $l = l_\alpha$, $k = k_\alpha$, $h = h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$. Les fonctions propres (33) du problème (32) sont orthonormées:

$$(\mu_h(x), \mu_m(x))_{\bar{\omega}} = \delta_{h,m}.$$

§ 4. Théorèmes de plongement

Au § 2, en établissant les estimations à priori pour les solutions des problèmes discrets sur un intervalle fermé, on a vu qu'il était nécessaire de comparer des normes différentes d'une même fonction. Pour faire cette comparaison il a fallu majorer une norme en fonction d'une autre avec des constantes ne dépendant pas du réseau. La même situation se présente lorsqu'on étudie des problèmes discrets multidimensionnels.

Dans ce paragraphe, on établira d'autres inégalités reliant certaines normes de fonctions discrètes définies sur un réseau situé sur un intervalle fermé ou un rectangle. On n'étudiera que des inégalités dont les constantes ne dépendent ni de la fonction en question, ni du réseau sur lequel elle est donnée. Les propositions traduisant ces inégalités seront appelées théorèmes de plongement.

1. Théorèmes de plongement pour fonctions discrètes d'un argument. On étudiera des fonctions discrètes données sur un réseau $\bar{\omega} \in [0, l]$. Dans une partie des théorèmes de ce point on supposera que le réseau est régulier. Rappelons les notations des normes des fonctions discrètes qui seront utilisées:

$$\|v\|_C = \max_{x\in\bar{\omega}} |v(x)|, \quad \|v_{\bar{x}}\|_C = \max_{x\in\omega^+} |v_{\bar{x}}(x)|,$$

$$\|v\|_0 \equiv \|v\|_{L_2(\bar{\omega})} = (v, v)_{\bar{\omega}}^{1/2}, \quad \|v_{\bar{x}}\|_0 = (x_{\bar{x}}, v_{\bar{x}})_{\omega^+}^{1/2},$$

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0 = (v_{\bar{x}, x}, v_{\bar{x}x})_{\bar{\omega}}^{1/2}.$$

Théorème 1. *Pour toute fonction discrète $v(x)$ donnée sur un réseau irrégulier arbitraire $\bar{\omega}$ et nulle pour $x = 0$ et $x = l$, on a*

$$\|v\|_C^2 \leqslant M_1 \|v_{\bar{x}}\|_0^2, \tag{1}$$

où $M_1 = l/4$.

Démonstration. La fonction $v(x)$ admet les représentations suivantes

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x}, j} h_j, \quad v_i = -\sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x}, j} h_j.$$

En vertu des inégalités de Cauchy (15) § 1, il vient

$$v_i^2 \leqslant x_i \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x}, j}^2 h_j, \tag{2}$$

$$v_i^2 \leqslant (l - x_i) \sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x}, j}^2 h_j. \tag{3}$$

Multiplions l'inégalité (2) par $(l - x_i)$ et l'inégalité (3) par x_i. Ajoutons les expressions obtenues et divisons cette somme par l. On a

$$v^2(x) \leqslant \frac{x(l-x)}{l} \|v_{\bar{x}}\|_0^2 \leqslant \frac{l}{4} \|v_{\bar{x}}\|_0^2, \quad x \in \bar{\omega}.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit x, elle l'est pour $x = x_0$, où la fonction $v^2(x)$ atteint son maximum. C.Q.F.D.

Remarque 1. L'inégalité (1) est valable (avec $M_1 = l$) pour les fonctions nulles seulement pour $x = 0$ ou $x = l$.

Remarque 2. L'inégalité (1) avec $M_1 = l/4$ est exacte en ce sens qu'il existe un réseau $\bar{\omega}$ et une fonction $v(x)$ tels que soit réa-

lisée l'égalité dans (1). Exemple: la fonction $v(x) = |x - l/2|$ sur tout réseau admettant pour nœud le point $x = l/2$.

Voici la généralisation du théorème 1 à des fonctions discrètes quelconques.

Théorème 2. *Pour toute fonction discrète $v(x)$ donnée sur un réseau irrégulier $\bar{\omega}$, on a*

$$\|v\|_C^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + (1/\varepsilon + 1/l) \|v\|_0^2, \tag{4}$$

où ε *est une constante positive.*

Démonstration. De

$$v_i^2 = v_j^2 + \sum_{k=j+1}^{i} (v^2)_{\bar{x},k} h_k, \quad i \geqslant j,$$

$$v_i^2 = v_j^2 - \sum_{k=i+1}^{j} (v^2)_{\bar{x},k} h_k, \quad i \leqslant j,$$

il résulte que pour tout $(x, y) \in \bar{\omega}$, on a

$$v^2(x) \leqslant v^2(y) + (|(v^2)_{\bar{x}}|, 1)_{\omega^+}.$$

Fixons x et multiplions cette inégalité scalairement par l:

$$lv^2(x) \leqslant \|v\|_0^2 + l(|(v^2)_{\bar{x}}|, 1)_{\omega^+}. \tag{5}$$

Il est immédiat de vérifier que (ici $v^{(-1)} \equiv v_{i-1}$)

$$(v^2)_{\bar{x}} = (v + v^{(-1)}) v_{\bar{x}}.$$

L'inégalité de Cauchy (15) § 1 et ε-inégalité (16) § 1 entraînent

$$(|(v^2)_{\bar{x}}|, 1)_{\omega^+} \leqslant (|v|, |v_{\bar{x}}|)_{\omega^+} + (|v^{(-1)}|, |v_{\bar{x}}|)_{\omega^+} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \Big[\sum_{x \in \omega^+} v^2(x-h) h + \sum_{x \in \omega^+} v^2(x) h \Big] = \varepsilon \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|v\|_0^2.$$

Portant cette majoration dans (5) et divisant par l on obtient l'inégalité (4). C.Q.F.D.

Dans l'inégalité du théorème 2 on peut remplacer la fonction par sa formule discrète.

Lemme 1. *Pour toute fonction discrète $v(x)$ donnée sur un réseau régulier $\bar{\omega}$ on a*

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x},x}\|_0^2 + (1/\varepsilon + 1/l) \|v_{\bar{x}}\|_0^2. \tag{6}$$

Démonstration. En reprenant les mêmes raisonnements que pour (5) on obtient

$$lv_{\bar{x}}^2(x) \leqslant \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + l(|(v_{\bar{x}}^2)_x|, 1)_\omega. \tag{7}$$

Comme

$$(v_{\bar{x}}^2)_x = (v_x + v_{\bar{x}}) v_{\bar{x}x},$$

il résulte de l'inégalité de Cauchy (15) § 1 et ε-inégalité (16) § 1 que

$$(|(v_{\bar{x}}^2)_x|, 1)_\omega \leqslant \varepsilon \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (v_x^2 + v_{\bar{x}}^2, 1)_\omega \leqslant \varepsilon \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| v_{\bar{x}} \|_0^2.$$

Portant cette inégalité dans (7), on obtient (6). Ce qui démontre le lemme.

Lemme 2. *Pour toute fonction discrète $v(x)$ donnée sur un réseau régulier $\bar{\omega}$, on a*

$$\| v_{\bar{x}} \|_0^2 \leqslant \varepsilon \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + M (1/\varepsilon + 1/l^2) \| v \|_0^2, \tag{8}$$

où ε est une constante positive quelconque, M une constante positive ne dépendant pas de $\bar{\omega}$. Si la fonction $v(x)$ ne s'annule pas pour $x = 0$ et $x = l$, elle vérifie, en plus de (8), l'inégalité plus exacte

$$\| v_{\bar{x}} \|_0^2 \leqslant \varepsilon \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \| v \|_0^2. \tag{9}$$

Démonstration. Multiplions l'inégalité

$$\left(l \sqrt{\alpha} v_{\bar{x}x} + \frac{1}{l \sqrt{\alpha}} v\right)^2 \geqslant 0$$

par h, sommons sur $x \in \omega$ et transformons l'expression obtenue à l'aide de la formule de Green (12) § 1

$$l^2\alpha \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + \frac{1}{l^2\alpha} \| v \|_0^2 - 2 \| v_{\bar{x}} \|_0^2 + 2 (v_{\bar{x}} v |_{x=l} - v_x v |_{x=0}) \geqslant 0.$$

Si $v(0) = v(l) = 0$, en posant $l^2\alpha/2 = \varepsilon$, on déduit l'inégalité (9). Dans le cas général, les calculs évidents donnent

$$\| v_{\bar{x}} \|_0^2 \leqslant \frac{\alpha l^2}{2} \| v_{xx} \|_0^2 + \frac{1}{2\alpha l^2} \| v \|_0^2 +$$
$$+ \beta l (v_x^2(0) + v_{\bar{x}}^2(l)) + \frac{1}{4\beta l} (v^2(0) + v^2(l)). \tag{10}$$

Estimons les termes entre parenthèses. En posant $\varepsilon = \gamma l$ dans (4) et $\varepsilon = \delta l$ dans (6), il vient

$$v^2(0) + v^2(l) \leqslant 2 \| v \|_C^2 \leqslant 2\gamma l \| v_{\bar{x}} \|_0^2 + 2 (1/(\gamma l) + 1/l) \| v \|_0^2,$$
$$v_x^2(0) + v_{\bar{x}}^2(l) \leqslant 2 \| v_{\bar{x}} \|_C^2 \leqslant 2\delta l \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 + 2 (1/(\delta l) + 1/l) \| v_{\bar{x}} \|_0^2.$$

Portant ces majorations dans (10) et transformant l'inégalité obtenue. il vient

$$\| v_{\bar{x}} \|_0^2 \leqslant l^2 \frac{\alpha/2 + 2\beta\delta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)} \| v_{\bar{x}x} \|_0^2 +$$
$$+ \frac{1}{2l^2} \frac{1/\alpha + 1/(\beta\gamma) + 1/\beta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)} \| v \|_0^2, \tag{11}$$

où α, β, γ et δ sont des constantes positives telles que

$$1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta) > 0. \tag{12}$$

Montrons que ces constantes peuvent être choisies telles que le coefficient en $\| v_{\bar{x}x} \|_0^2$ sera aussi petit que l'on veut. Posons

$$\zeta = \frac{\alpha/2 + 2\beta\delta}{1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta)} \tag{13}$$

et tirons δ. Il vient

$$\delta = \frac{1}{4\beta}(\zeta - 2\beta\zeta - \alpha/2 - \gamma\zeta/(2\beta) + \\ + \sqrt{(\zeta - 2\beta\zeta - \alpha/2 - \gamma\zeta/(2\beta))^2 - 8\beta^2\zeta} > 0.$$

Posons le radical égal à zéro. Il vient

$$\delta = \sqrt{\zeta/2}. \tag{14}$$

Portant cette valeur de δ dans (13) on obtient

$$\beta = \frac{\zeta - \alpha/2 + \sqrt{(\zeta - \alpha/2)^2 - 4\gamma\zeta(\zeta + 3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2})}}{4(\zeta + 3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2})} > 0.$$

Supposons que

$$\zeta - \alpha/2 > 0, \tag{15}$$

et posons de nouveau le radical égal à zéro. Il vient

$$\beta = \sqrt{\zeta}\,\frac{1 - \alpha/(2\zeta)}{4(3\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})}, \tag{16}$$

$$\gamma = \sqrt{\zeta}\,\frac{(1 - \alpha/(2\zeta))^2}{4(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})}. \tag{17}$$

On remarquera que si la condition (15) est réalisée, les constantes β, γ et δ définies par (16), (17) et (14) respectivement vérifient la condition (12).

Posant maintenant, par exemple, $\alpha = \zeta$ et tenant compte de (14), (16) et (17), on a

$$M(\zeta) = \frac{1/\alpha + 1/(\beta\gamma) + 1/\beta}{2(1 - 2\beta - 2\beta/\delta - \gamma/(2\beta))} = \\ = \frac{1/\zeta + 2^7(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})^2/\zeta + 8(3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2} + 1)/\zeta}{2\left(1 - \dfrac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{2}}{4(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})} - \dfrac{1}{4}\right)} = \\ = 2\,\frac{(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})^2}{\zeta} \cdot \frac{1 + 2^7(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})^2 + 8(3\sqrt{\zeta}/\sqrt{2} + 1)}{(7\sqrt{2} + 2\sqrt{\zeta})(3/\sqrt{2} + \sqrt{\zeta})} \leqslant M(1 + 1/\zeta).$$

Portant cette majoration dans (10) et notant $l^2\zeta$ par ε, on obtient l'inégalité (8). Ce qui démontre le lemme.

Théorème 3. *Pour toute fonction discrète $v(x)$, donnée sur un réseau régulier $\bar{\omega}$, on a*

$$\|v\|_C^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + M(1/l + 1/\varepsilon^{1/3}) \|v\|_0^2, \tag{18}$$

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2 \leqslant \varepsilon \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + M(1/l + 1/\varepsilon^3) \|v\|_0^2, \tag{19}$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitraire, M une constante positive ne dépendant ni du réseau $\bar{\omega}$ ni de la fonction $v(x)$.

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'inégalité (18). Posons $\varepsilon = \alpha l$ dans (4) et $\varepsilon = \beta l^2$ dans (8). Estimons $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ dans la première des inégalités en question à l'aide de la seconde. On a.

$$\|v\|_C^2 \leqslant \alpha\beta l^3 \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{1}{l}[M\alpha(1 + 1/\beta) + 1 + 1/\alpha] \|v\|_0^2. \tag{20}$$

Soit $\alpha\beta = \gamma$, $\beta = \gamma/2$. Posant

$$\alpha = \frac{\gamma^{1/3}}{1+\gamma^{1/3}}$$

on obtient

$$M\alpha(1 + 1/\beta) + 1 + 1/\alpha =$$
$$= \frac{1+\gamma^{1/3}}{\gamma^{1/3}}\left[1 + \frac{\gamma^{1/3}}{1+\gamma^{1/3}} + M\frac{\gamma+\gamma^{2/3}+1}{(1+\gamma^{1/3})^3}\right] \leqslant M_1(1+\gamma^{-1/3}).$$

Posant $l^3\gamma = \varepsilon$ et tenant compte de la majoration obtenue, on déduit que (20) entraîne (18).

Démontrons maintenant l'inégalité (19). Posons $\varepsilon = \alpha l$ dans (6) et $\varepsilon = \beta l^2$ dans (8). Estimant $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ dans la première des inégalités mentionnées à l'aide de la seconde, il vient

$$\|v_{\bar{x}}\|_C^2 \leqslant l(\alpha + \beta/\alpha + \beta) \|v_{\bar{x}x}\|_0^2 + \frac{M}{l^3}(1 + 1/\alpha)(1 + 1/\beta) \|v\|_0^2. \tag{21}$$

Soit

$$\alpha + \beta/\alpha + \beta = \gamma.$$

Exprimons β en fonction de α et γ:

$$\beta^{-1} = \frac{1+1/\alpha}{\gamma-\alpha}.$$

Posant par exemple $\alpha = \gamma/2$, on obtient

$$(1 + 1/\alpha)(1 + 1/\beta) = [1 + (2/\gamma)^3]\frac{1+2/\gamma+(2/\gamma)^2}{1-2/\gamma+(2/\gamma)^2} \leqslant 24(1+\gamma^{-3}).$$

En se servant de cette inégalité pour estimer le coefficient en $\|v\|_0^2$ de (21) et en posant $\gamma l = \varepsilon$, on déduit (19). C.Q.F.D.

2. Théorèmes de plongement pour les fonctions discrètes à deux arguments. Nous étudierons ici des fonctions discrètes données sur un réseau rectangulaire $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ tramant le rectangle $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1, 2\}$. Soit $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ l'ensemble des nœuds intérieurs du réseau $\bar{\omega}$, $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ l'ensemble des nœuds frontières.

Introduisons les normes suivantes pour les fonctions discrètes données sur le réseau $\bar{\omega}$:

$$\|v\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}} |v(x)|, \qquad \|v\|_0^2 = \sum_{\bar{\omega}_1} \hbar_1 \sum_{\bar{\omega}_2} \hbar_2 v^2(x),$$

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 = \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\bar{\omega}_2} \hbar_2 v_{\bar{x}_1}^2(x), \qquad \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 = \sum_{\bar{\omega}_1} \hbar_1 \sum_{\omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_2}^2(x),$$

$$\|\nabla v\|_0^2 = \|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2, \qquad \|v\|_1^2 = \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2.$$

Soit

$$(u, v)_\gamma = \sum_\gamma u(x) v(x) \tau(x),$$

où

$$\tau(x) = \begin{cases} h_\alpha(x_\alpha), \ x_\alpha \in \omega_\alpha, & x_\beta = 0, \ l_\beta; \quad \beta \neq \alpha, \\ [h_1(x_1) + h_2(x_2)]/2, & x_\alpha = 0, \ l_\alpha; \quad \alpha = 1, 2, \end{cases} \tag{22}$$

est l'analogue discret du produit scalaire des traces des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sur la frontière, et

$$\|v\|_0' = (v, v)_\gamma^{1/2}.$$

Introduisons la norme

$$\|v\|_{2,0}^2 = \sum_\omega h_1 h_2 (v_{\bar{x}_1 x_1}^2 + v_{\bar{x}_2 x_2}^2) + 2 \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2$$

pour les fonctions discrètes données sur le réseau régulier $\bar{\omega}$ et nulles sur sa frontière γ.

Théorème 4. *Pour toute fonction $v(x)$ donnée sur un réseau irrégulier quelconque $\bar{\omega}$, on a*

$$\|v\|_0'^2 \leqslant \varepsilon \|\nabla v\|_0^2 + M_2(\varepsilon) \|v\|_0^2,$$

où ε est une constante positive, et

$$M_2(\varepsilon) = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} + \frac{8}{\varepsilon}.$$

Démonstration. En vertu du théorème 2, on a pour la fonction $v(x)$ à x_2 fixe:

$$v^2(0, x_2) + v^2(l_1, x_2) \leqslant 2\varepsilon_1 \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2(x) h_1 + 2(1/l_1 + 1/\varepsilon_1) \sum_{\bar{\omega}_1} v^2(x) \hbar_1.$$

Multipliant cette inégalité par $\hbar_2(x_2)$ et sommant ensuite sur $\bar{\omega}_2$, on obtient

$$\sum_{\bar{\omega}_2} [v^2(0, x_2)\hbar_2 + v^2(l_1, x_2)\hbar_2] \leqslant 2\varepsilon_1 \| v_{\bar{x}_1} \|_0^2 + 2(1/l_1 + 1/\varepsilon_1) \| v \|_0^2.$$

De façon analogue on démontre l'inégalité

$$\sum_{\bar{\omega}_1} [v^2(x_1, 0)\hbar_1 + v^2(x_1, l_2)\hbar_1] \leqslant 2\varepsilon_1 \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2 + 2(1/l_2 + 1/\varepsilon_1) \| v \|_0^2.$$

En ajoutant les deux dernières inégalités et en posant $2\varepsilon_1 = \varepsilon$ on arrive à la conclusion du théorème.

Théorème 5. *Pour toute fonction discrète $v(x)$ donnée sur un réseau régulier $\bar{\omega}$ et nulle sur sa frontière γ, on a*

$$\| v \|_C \leqslant M_3 \| v \|_{2,0},$$

où

$$M_3^2 = \frac{1}{32}\left[\pi(l_1^2 + l_2^2) + \frac{2l_1^3 l_2^3}{(l_1^2 + l_2^2)^2}\right].$$

Démonstration. Soient $\mu_k(x)$ les fonctions propres du laplacien discret sur le réseau $\bar{\omega}$, qui vérifient les conditions aux limites de première espèce. Développons la fonction $v(x)$ sur les fonctions $\mu_k(x)$:

$$v(x) = \sum_k v_k \mu_k(x), \quad k = (k_1, k_2).$$

En vertu de (31) § 3, les fonctions $\mu_k(x)$ sont uniformément bornées, donc

$$v^2(x) = \left(\sum_k v_k \mu_k(x)\right)^2 \leqslant \frac{4}{l_1 l_2}\left(\sum_k |v_k|\right)^2. \tag{23}$$

Estimons le carré de la somme du second membre de (23)

$$\left(\sum_k |v_k|\right)^2 = \left(\sum_k |v_k| \lambda_k \lambda_k^{-1}\right)^2 \leqslant \sum_k v_k^2 \lambda_k^2 \sum_k \lambda_k^{-2}, \tag{24}$$

où λ_k sont les valeurs propres du laplacien discret. L'orthonormalité des fonctions propres $\mu_k(x)$ et l'orthogonalité de leurs formules discrètes (cf. problème (30) § 3 et (2) § 3) entraînent

$$\sum_k v_k^2 \lambda_k^2 = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} v_{k_1 k_2}^2 (\lambda_{k_1}^2 + 2\lambda_{k_1}\lambda_{k_2} + \lambda_{k_2}^2) =$$

$$= \| v_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + 2 \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 = \| v \|_{2,0}^2.$$

De là et des expressions (24), (23) résulte la majoration

$$\| v \|_C^2 \leqslant M \| v \|_{2,0}^2, \tag{25}$$

où

$$M = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_k \lambda_k^{-2}.$$

Estimons la constante M. Comme

$$\sum_k \lambda_k^{-2} = \lambda_1^{-2} + \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2}}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \lambda_k^{-2},$$

en vertu des formules (31), (11) et (12) § 3, il vient

$$\sum_k \lambda_k^{-2} \leqslant \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}\right)^{-2} + \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_1+k_2>2}}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \left(\frac{4}{l_1^2} k_1^2 + \frac{4}{l_2^2} k_2^2\right)^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right] + \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(\frac{4}{l_1^2}\cos^2\varphi + \frac{4}{l_2^2}\sin^2\varphi\right)^2} + \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^3} =$$

$$= \left[\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right]^2 + \frac{\pi l_1 l_2 (l_1^2+l_2^2)}{2^7},$$

car *)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{4ab^3}.$$

En portant cette majoration dans (25), on arrive à la conclusion du théorème.

Théorème 6. *Pour tout couple de fonctions discrètes $u(x)$ et $v(x)$ sur un réseau régulier $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, nulles pour $x_1 = 0$ et $x_1 = l_1$, on a*

$$\left\| \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 \frac{u(x) + u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1} \right\|_{C(\bar{\omega}_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \varepsilon_1 \|u_{\bar{x}_2}\|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right) \|u_{\bar{x}_1}\|_0^2 \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \varepsilon_2 \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right) \|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 \right\}^{1/2}$$

où ε_1 et ε_2 sont des constantes positives.

Démonstration. Nous la ferons en trois étapes. Dans une première étape on prouvera que l'inégalité (26) découle d'une inégalité analogue pour fonctions d'argument continu, en l'occurrence

*) Cf. par exemple, la formule 3.642.3 dans l'ouvrage de *Gradstein I., Ryjik I.*, Tables des intégrales, sommes, séries et produits, M., « Naouka », 1971.

de

$$\sup_{0\leqslant y_1\leqslant l_1}\left|\int_0^{l_1}\tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}(y)}{\partial y_1}dy_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\varepsilon_1\left\|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_2}\right\|^2_{L_2(\overline{D})}+\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\left\|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_1}\right\|^2_{L_2(\overline{D})}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\varepsilon_2\left\|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_2}\right\|^2_{L_2(\overline{D})}+\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\left\|\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_1}\right\|^2_{L_2(\overline{D})}\right\}^{1/2}. \qquad (27)$$

Etablissons ensuite l'estimation

$$\left|\int_0^{l_1}\tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_1}dy_1\right|\leqslant\|\tilde{u}\|_{\overline{W}_2^{1/2}[0,\,l_1]}\|\tilde{v}\|_{\overline{W}_2^{1/2}[0,\,l_1]}, \qquad (28)$$

où $\|\cdot\|_{\overline{W}_2^{1/2}[0,\,l_1]}$ est une norme définie plus bas.

Achevons la démonstration du théorème en majorant les fonctions $\tilde{u}(y)$ et $\tilde{v}(y)$ comme suit

$$\sup_{0\leqslant y_2\leqslant l_2}\|\tilde{w}(y)\|^2_{\overline{W}_2^{1/2}[0,\,l_1]}\leqslant\varepsilon\left\|\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y_2}\right\|^2_{L_2(\overline{D})}+\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\left\|\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y_1}\right\|^2_{L_2(\overline{D})}, \qquad (29)$$

où ε est un nombre positif.

Mettons notre plan à exécution. 1) Soit $\overline{D}=\{y=(y_1,\,y_2)\,|\,0\leqslant\leqslant y_\alpha\leqslant l_\alpha;\ \alpha=1,\,2\}$ un rectangle, $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2$ un réseau tramant le rectangle D, où $\overline{\omega}_\alpha=\{x_\alpha=h_\alpha i_\alpha\,|\,i_\alpha=0,\,1,\,\ldots,\,N_\alpha;\ N_\alpha=l_\alpha/h_\alpha\}$. Les droites $y_\alpha=h_\alpha i_\alpha$ et $y_2=\frac{h_2}{h_1}y_1+h_1 i_1$, où $i_\alpha=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, divisent le rectangle $\overline{D}$ en triangles égaux dont les sommets sont les nœuds du réseau $\overline{\omega}$. Soient $\tilde{u}(y)$ et $\tilde{v}(y)$, $x\in\overline{\omega}$ des fonctions continues, par morceaux linéaires sur chacun des triangles, coïncidant respectivement avec $u(x)$ et $v(x)$ pour $y=x\in\overline{\omega}$. Les dérivées $\partial\tilde{u}/\partial y_\alpha$ et $\partial\tilde{v}/\partial y_\alpha$ sont constantes par morceaux, donc

$$\|u_{\bar{x}_\alpha}\|_0^2=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_\alpha}\right)^2dy_1\,dy_2,\quad \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_0^2=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y_\alpha}\right)^2dy_1\,dy_2. \qquad (30)$$

D'autre part

$$\sum_{x_1\in\omega_1^+}h_1\frac{u(x)+u^{(-1_1)}(x)}{2}v_{\bar{x}_1}(x)$$

est confondue avec la formule des trapèzes pour l'intégrale

$$\int_0^{l_1}\tilde{u}(y)\frac{\partial\tilde{v}(y)}{\partial y_1}dy_1,$$

et comme $\tilde{u}\,\partial\tilde{v}/\partial y_1$ est linéaire par morceaux, il vient pour $y_2 = x_2 \in \bar{\omega}_2$

$$\sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 \frac{u(x) + u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x) = \int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1. \tag{31}$$

D'où il résulte que

$$\left\| \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 \frac{u(x) + u^{(-1_1)}(x)}{2} v_{\bar{x}_1}(x) \right\|_{C(\bar{\omega}_2)} \leqslant \sup_{0 \leqslant y_2 \leqslant l_2} \left| \int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1 \right|. \tag{32}$$

Les expressions (30) à (32) entraînent la validité du théorème sous réserve que soit réalisée (27).

2) Prouvons maintenant l'inégalité (28). Soit $w(y_1)$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, l_1]$, nulle pour $y_1 = 0, l_1$. Soit

$$\| w \|^2_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2 \frac{k\pi}{l_1}, \tag{33}$$

où w_k sont les coefficients de Fourier du développement de la fonction $w(y_1)$ sur le système orthonormé $\left\{ \sqrt{2/l_1} \sin \frac{k\pi y_1}{l_1} \right\}_1^{\infty}$, i.e.

$$w_k = \sqrt{2/l_1} \int_0^{l_1} w(y_1) \sin \frac{k\pi y_1}{l_1} dy_1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Développons à $y_2 \in [0, l_2]$ fixe les fonctions $\tilde{u}(y)$ et $\tilde{v}(y)$ sur le système orthonormé

$$\tilde{u}(y) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(y_2) \sin \frac{k\pi y_1}{l_1}, \quad \tilde{v}(y) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{v}_k(y_2) \sin \frac{k\pi y_1}{l_1}.$$

Portant ce développement dans le premier membre de (28) et effectuant des calculs simples, il vient

$$\int_0^{l_1} \tilde{u}(y) \frac{\partial \tilde{v}(y)}{\partial y_1} dy_1 = \frac{2}{l_1} \sum_{\substack{p, q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} \frac{pq}{p^2 - q^2} [1 - (-1)^{p+q}] \tilde{u}_p(y_2) \tilde{v}_q(y_2).$$

La définition (33) et cette expression entraînent que l'inégalité (28) aura lieu si l'on prouve que la forme bilinéaire

$$A(\xi, \eta) \equiv \sum_{\substack{p, q=1 \\ p \neq q}}^{\infty} a_{pq} \xi_p \eta_q, \tag{34}$$

où

$$a_{pq} = \frac{\sqrt{pq}}{p^2 - q^2}\,[1 - (-1)^{p+q}], \quad p \neq q, \tag{35}$$

est égale à la constante $\pi/2$, et est bornée, i.e.

$$|A(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{2}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2 \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2\Big)^{1/2}. \tag{36}$$

Démontrons l'inégalité (36). Considérons tout d'abord la forme bilinéaire $B(\xi, \eta)$ dont les coefficients sont définis par

$$b_{pq} = \frac{1 - (-1)^{p+q}}{p - q}, \quad p \neq q, \; b_{pp} = 0, \tag{37}$$

et montrons qu'elle est bornée par la constante π. Introduisons à ces fins la forme bilinéaire $C(\xi, \eta)$ de coefficients

$$c_{pq} = \frac{1 - (-1)^{p+q}}{p + q}$$

et les formes conjuguées $B'(\xi, \eta)$ et $C'(\xi, \eta)$ dont les matrices B' et C' sont conjuguées aux matrices B et C des formes $B(\xi, \eta)$ et $C(\xi, \eta)$ respectivement. Construisons les formes $F(\xi, \eta)$ et $G(\xi, \eta)$ dont les matrices F et G sont les produits des matrices B par B' et C par C', i.e.

$$f_{pq} = \sum_{h=1}^{\infty} b_{ph} b_{qh}, \quad g_{pq} = \sum_{h=1}^{\infty} c_{ph} c_{qh}.$$

Les matrices F et G sont visiblement symétriques et non négatives:

$$F = F', \; G = G', \; F(\xi, \xi) \geqslant 0, \; G(\xi, \xi) \geqslant 0.$$

Supposons que la forme quadratique $F(\xi, \xi)$ est bornée par la constante M^2: $F(\xi, \xi) \leqslant M^2 \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2$. On a

$$|B(\xi, \eta)| = \Big|\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q \sum_{p=1}^{\infty} b_{pq}\xi_p\Big| \leqslant \Big(\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2\Big)^{1/2} \Big\{\sum_{q=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} b_{pq}\xi_p\Big)^2\Big\}^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2\Big)^{1/2} \{F(\xi, \xi)\}^{1/2} \leqslant M\Big(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^2 \sum_{q=1}^{\infty} \eta_q^2\Big)^{1/2}, \tag{38}$$

i.e. la majoration de la forme quadratique $F(\xi, \xi)$ par la constante M^2 entraîne celle de la forme bilinéaire $B(\xi, \eta)$ par la constante M, donc il suffit de prouver la première.

Par ailleurs $G(\xi, \xi) \geqslant 0$, il vient

$$F(\xi, \xi) \leqslant F(\xi, \xi) + G(\xi, \xi) \equiv H(\xi, \xi).$$

Evaluons la forme quadratique $H(\xi, \xi)$. Calculons d'abord ses coefficients:

$$h_{pp} = f_{pp} + g_{pp} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (b_{pk}^2 + c_{pk}^2) = \sum_{k=1}^{\infty} [1-(-1)^{p+k}]^2 \left[\frac{1}{(p+k)^2} + \frac{1}{(p-k)^2}\right] =$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1-(-1)^{p+k}] \frac{1}{(p+k)^2} - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

En faisant le changement $p+k=k'$, on obtient

$$h_{pp} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [1-(-1)^k] \frac{1}{k^2} - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2} =$$

$$= 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

Il est standard *) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

donc

$$h_{pp} = \pi^2 - 2[1-(-1)^p] \frac{1}{p^2}.$$

Si $p \neq q$

$$h_{pq} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_{pk} b_{qk} + c_{pk} c_{qk}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}] \left[\frac{1}{(p+k)(q+k)} - \frac{1}{(p-k)(q-k)}\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{[1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}]}{(p+k)(q+k)} - \frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq} =$$

$$= \bar{h}_{pq} - \frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq}.$$

*) *Gradstein I., Ryjik I.*, Tables des intégrales, sommes, séries et produits. Formule 0.234.2.

Etudions $\bar{h}_{pq}$:

$$\bar{h}_{pq}=\frac{1}{p-q}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[1-(-1)^{p+k}][1-(-1)^{q+k}]\left[\frac{1}{q+k}-\frac{1}{p+k}\right]=$$

$$=\frac{4}{p-q}\begin{cases}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right], & \text{si } p \text{ et } q \text{ sont pairs,}\\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k}-\frac{1}{p+2k}\right], & \text{si } p \text{ et } q \text{ sont impairs,}\\ 0, & \text{si } p+q \text{ est impair.}\end{cases}$$

Etudions chaque somme séparément:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=\lim_{K\to\infty}\sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right].$$

On peut écrire

$$\sum_{k=-K}^{K}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=$$

$$=\sum_{i=-K}^{K}\frac{1}{q+2i-1}-\sum_{j=-K}^{K}\frac{1}{p+2j-1}=h_{pq}^{(1)}(K).$$

p et q étant pairs, dans chaque somme on peut procéder au changement: $q+2i=2k$, $p+2j=2k$. On obtient en définitive

$$h_{pq}^{(1)}(K)=\sum_{k=-K+q/2}^{K+q/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+p/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}.$$

Pour $|p|$, $|q|<K$ et $p<q$

$$h_{pq}^{(1)}(K)=\sum_{k=-K+q/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=K+1+p/2}^{K+q/2}\frac{1}{2k-1}-$$

$$-\sum_{k=-K+p/2}^{-K-1+q/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+q/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}=$$

$$=\sum_{k=K+1+p/2}^{K+p/2}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=-K+p/2}^{-K-1+q/2}\frac{1}{2k-1}.$$

D'où il résulte que pour $p<q$ et $|p|$, $|q|<K$

$$|h_{pq}^{(1)}(K)|\leqslant\frac{|p-q|}{2K+1-|p|},$$

donc pour $p<q$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k-1}-\frac{1}{p+2k-1}\right]=\lim_{K\to\infty}h_{pq}^{(1)}(K)=0.$$

De façon analogue on montre que cette somme est nulle pour $p>q$, de même que la somme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{q+2k}-\frac{1}{p+2k}\right].$$

Donc $\overline{h}_{pq}=0$ et

$$h_{pq}=-\frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq}.$$

Et partant

$$H(\xi,\xi)=\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2-\sum_{p,\,q=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^p][1-(-1)^q]}{pq}\xi_p\xi_q=$$

$$=\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2-4\sum_{p,\,q=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}\xi_{2q-1}}{(2p-1)(2q-1)}.$$

Or

$$\sum_{p,\,q-1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}\xi_{2q-1}}{(2p-1)(2q-1)}=\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\xi_{2p-1}}{2p-1}\right)^2\geqslant 0$$

donc

$$H(\xi,\xi)\leqslant\pi^2\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2.$$

Ceci et (38) entraînent

$$|B(\xi,\eta)|=\left|\sum_{\substack{p,\,q=1\\ p\neq q}}^{\infty}\frac{1-(-1)^{p+q}}{p-q}\xi_p\eta_q\right|\leqslant\pi\left(\sum_{p=1}^{\infty}\xi_p^2\sum_{q=1}^{\infty}\eta_q^2\right)^{1/2}. \qquad (39)$$

Avant de passer à la démonstration de l'inégalité (36) considérons une autre forme quadratique:

$$S(\xi,\xi)=\sum_{p,\,q=1}^{\infty}\frac{\xi_p\xi_q}{p+q}. \qquad (40)$$

Comme $\frac{1}{p+q} = \int_0^\infty e^{-(p+q)t}\,dt$ il vient

$$S(\xi, \xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{p,\,q=1}^{n} \frac{\xi_p \xi_q}{p+q} = \int_0^\infty \Big(\sum_{p=1}^{\infty} \xi_p e^{-pt} \Big)^2 dt \geqslant 0,$$

i.e. la forme quadratique $S(\xi, \xi)$ n'est pas négative. Posant $\xi_p = \sqrt{p}\,\xi'_p$ dans (40), on s'assure que la forme quadratique

$$T(\xi, \xi) = \sum_{p,\,q=1}^{\infty} t_{pq}\xi_p\xi_q, \quad t_{pq} = \frac{\sqrt{pq}}{p+q},$$

ne l'est pas également. Soit n un nombre naturel quelconque et

$$T_n(\xi, \xi) = \sum_{p,\,q=1}^{n} t_{pq}\xi_p\xi_q, \quad t_{pq} = \frac{\sqrt{pq}}{p+q}. \tag{41}$$

La forme $T_n(\xi, \xi)$ n'étant pas négative, on peut extraire la racine carrée de sa matrice : $T_n^{1/2} = U_n$. Soit u_{pq} les éléments de la matrice U_n. On a

$$t_{pq} = \sum_{r=1}^{n} u_{rp}u_{rq}. \tag{42}$$

Considérons la forme bilinéaire

$$A_n(\xi, \eta) = \sum_{\substack{p,\,q=1\\ p\neq q}}^{n} a_{pq}\xi_p\eta_q$$

dont les coefficients sont définis par (35). Lorsque $n \to \infty$ cette forme se change en la forme (34). De (35), (37), (41) et (42) il suit

$$a_{pq} = b_{pq}t_{pq} = b_{pq} \sum_{r=1}^{n} u_{rp}u_{rq},$$

i.e.

$$A_n(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{p,\,q=1\\ p\neq q}}^{n} b_{pq}(u_{rp}\xi_p)(u_{rq}\eta_q) = \sum_{r=1}^{n} B_n(u_{rp}\xi_p, u_{rq}\eta_q), \tag{43}$$

où $B_n(\alpha_p, \beta_q) = \sum_{p,\,q=1}^{n} b_{pq}\alpha_p\beta_q$. En vertu de (39) la forme bilinéaire $B_n(\alpha_p, \beta_q)$ est bornée par π, donc

$$|B_n(u_{rp}\xi_p, u_{rq}\eta_q)| \leqslant \pi \Big[\sum_{p=1}^{n} (u_{rp}\xi_p)^2 \sum_{p=1}^{n} (u_{rp}\eta_p) \Big]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} (u_{rp})^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

Utilisant cette inégalité pour majorer le second membre de (43) et tenant compte de (42), on obtient

$$|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} (u_{rp})^2 (\xi_p^2 + \eta_p^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} t_{pp} (\xi_p^2 + \eta_p^2) \leqslant \frac{\pi}{2} \max_{1 \leqslant p \leqslant n} t_{pp} \sum_{p=1}^{n} (\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

Or (41) entraîne que $\max t_{pp} = 1/2$, donc

$$|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{4} \sum_{p=1}^{n} (\xi_p^2 + \eta_p^2).$$

Soit $\sum_{p=1}^{n} \xi_p^2 = \sum_{p=1}^{n} \eta_p^2 = 1$. Donc $|A_n(\xi, \eta)| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Posant dans $A_n(\xi, \eta)$

$$\xi_p = \xi'_p / \Big(\sum_{p=1}^{n} \xi'^2_p\Big), \quad \eta_p = \eta'_p / \Big(\sum_{p=1}^{n} \eta'^2_p\Big),$$

on aboutit à l'inégalité :

$$|A_n(\xi', \eta')| \leqslant \frac{\pi}{2} \Big(\sum_{p=1}^{n} \xi'^2_p \sum_{q=1}^{n} \eta'^2_q\Big)^{1/2}.$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$, on obtient l'inégalité (36) qui entraîne (28).

3) Reste maintenant à démontrer l'inégalité (29). Soit $\widetilde{w}(y)$ une fonction confondue avec $\widetilde{u}(y)$ ou $\widetilde{v}(y)$. En vertu de la définition (33)

$$\|\widetilde{w}(y_1 y_2)\|^2_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{w}_k^2(y_2) \frac{k\pi}{l_1}. \tag{44}$$

En se servant du théorème 2 § 4, on démontre sans peine que

$$\widetilde{w}_k^2 \leqslant \varepsilon_k \int_0^{l_2} \Big(\frac{\partial \widetilde{w}_k}{\partial y_2}\Big)^2 dy_2 + \Big(\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{l_2}\Big) \int_0^{l_2} \widetilde{w}_k^2(y_2)\, dy_2.$$

Portant cette majoration dans le second membre de (44) et posant $\varepsilon_k k\pi / l_1 = \varepsilon$, il vient

$$\|\widetilde{w}(y_1, y_2)\|^2_{\overline{W}_2^{1/2}[0, l_1]} \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_2} \Big(\frac{\partial \widetilde{w}_k}{\partial y_2}\Big)^2 dy_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{l_1 k\pi}\Big) \Big(\frac{k\pi}{l_1}\Big)^2 \int_0^{l_2} \widetilde{w}_k^2(y_2)\, dy_2.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \widetilde{w}_k}{\partial y_2}\right) dy_2 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y_2}\right)^2 dy_1\, dy_2,$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{l_2 k\pi}\right) \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 \int_0^{l_2} \widetilde{w}_k^2(y_2)\, dy_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 \int_0^{l_2} \widetilde{w}_k^2 y_2\, dy_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{l_1}{\pi l_2}\right) \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y_1}\right)^2 dy_1\, dy_2,$$

d'où résulte l'inégalité (29). Ce qui achève la démonstration du théorème.

§ 5. Minorations relatives à quelques opérateurs

En étudiant les modèles unidimensionnels au § 2 nous avons eu au cours des diverses étapes à effectuer des estimations du type

$$[y, y] \geqslant M \| y \|_0^2, \quad M = \text{const} > 0, \tag{1}$$

où $[u, v] \equiv (\Lambda u, v)_\omega$ ou $[u, v] \equiv (\bar{\Lambda} u, v)_{\bar{\omega}}$ et Λ, $\bar{\Lambda}$ sont les approximations des opérateurs différentiels correspondants et des conditions aux limites. Tous les opérateurs du § 2 étaient autoconjugués au sens des produits scalaires correspondants. Or pour les opérateurs autoconjugués on a

$$\lambda_{\min}(v, v) \leqslant (Av, v),$$

où $\lambda_{\min}$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur, i.e.

$$\lambda_{\min} = \min \lambda(A).$$

D'où il résulte que (1) minore la plus petite valeur propre de l'opérateur discret correspondant.

Dans ce paragraphe on établira des minorations (1) pour quelques opérateurs discrets agissant sur des fonctions discrètes de un ou deux arguments. Pour ne pas répéter toujours les mêmes raisonnements, les propositions seront démontrées non pas en termes d'opérateurs mais en termes de formes quadratiques $[v, v]$ qui sont liées de façon évidente avec les opérateurs minorés.

1. Fonctions discrètes d'un argument. Considérons des fonctions discrètes données sur un réseau $\bar{\omega}$ sur l'intervalle $[0, l]$.

Lemme 1 (inégalité de Friederichs). *Pour toute fonction discrète $v(x)$, donnée sur un réseau régulier $\bar{\omega}$ de pas h et nulle pour $x = 0$ et $x = l$, on a*

$$\|v_x\|_0^2 \geqslant M_1 \|v\|_0^2, \quad \text{où} \quad M_1 = \left[\frac{2\sin(\pi h/(2l))}{h}\right]^2. \tag{2}$$

Démonstration. La formule discrète de Green (12) § 1 donne

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 = -(v_{\bar{x}x}, v)_\omega.$$

Donc pour obtenir (2), il suffit d'estimer l'opérateur aux différences secondes avec des conditions aux limites de première espèce. Au § 3 on a examiné le problème aux valeurs propres correspondant et on a établi entre autres que la valeur propre minimale de ce problème était M_1. Ce qui entraîne l'inégalité (2). Le lemme est démontré.

Remarque 1. L'inégalité (2) avec la constante M_1 est exacte en ce sens qu'elle se transforme en une égalité si pour $v(x)$ on prend la première fonction propre du problème (2) § 3.

Remarque 2. La constante M_1 de l'inégalité (2) dépend du pas h, mais, en vertu de (12) § 3, elle peut être minorée par une quantité ne dépendant pas de h. Plus exactement pour $h \leqslant l/2$ on a $M_1 \geqslant 8/l^2$.

Remarque 3. L'inégalité (2) vaut pour un réseau irrégulier si la constante M_1 est égale à $8/l^2$ (cf. lemme 2).

Remarque 4. L'inégalité (2) est valable pour les fonctions qui s'annulent en une extrémité seulement, i.e. pour $x = 0$ ou $x = l$, mais avec une constante supérieure (cf. remarque 2 du lemme 2).

Remarque 5. Si $v(x)$ est une fonction discrète quelconque sur $\bar{\omega}$, l'inégalité (2) n'est d'une façon générale pas valable pour elle. Exemple : la fonction $v(x) = \text{const}$ $(x \in \bar{\omega})$ pour laquelle le premier membre de (2) est nul. Aux lemmes 2 et 3 on établira les analogues de l'inégalité (2) pour des fonctions arbitraires.

Lemme 2. *Pour toute fonction discrète $v(x)$, donnée sur un réseau irrégulier $\bar{\omega}$, on a*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \varkappa_0 v^2(0) + \varkappa_1 v^2(l) \geqslant M_2 \|v\|_0^2, \tag{3}$$

où $\varkappa_0$ et $\varkappa_1$ sont des constantes non négatives dont la somme est positive, et

$$M_2 = \frac{8(\varkappa_0 + \varkappa_1 + l\varkappa_0\varkappa_1)^2}{l(2 + l\varkappa_0)(2 + l\varkappa_1)(2\varkappa_0 + 2\varkappa_1 + l\varkappa_0\varkappa_1)}. \tag{4}$$

Si $v(0) = v(l) = 0$, l'inégalité (3) s'écrit

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant \frac{8}{l^2} \|v\|_0^2. \tag{5}$$

Expliquons l'idée de la démonstration sur l'exemple de fonctions d'argument continu. Toute fonction dérivable $v(x)$ vérifie l'identité

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(\xi)\, d\xi.$$

Elevant cette identité au carré et estimant le second membre à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski et de ε-inégalité (16) § 1, il vient

$$v^2(x) \leqslant (1+\varepsilon_0)\, v^2(0) + (1+1/\varepsilon_0)\, x \int_0^x v'^2(\xi)\, d\xi.$$

Soit $x \leqslant y \leqslant l$. On a

$$v^2(x) \leqslant (1+\varepsilon_0)\, v^2(0) + (1+1/\varepsilon_0)\, x \int_0^y v'^2(\xi)\, d\xi.$$

Intégrant cette inégalité sur x entre 0 et y, on obtient

$$\int_0^y v^2(x)\, dx \leqslant (1+\varepsilon_0)\, y v^2(0) + (1+1/\varepsilon_0) \frac{y^2}{2} \int_0^y v'^2(\xi)\, d\xi.$$

De façon analogue on démontre

$$\int_0^l v^2(x)\, dx \leqslant (1+\varepsilon_1)(l-y)\, v^2(l) + (1+1/\varepsilon_1) \frac{(l-y)^2}{2} \int_y^l v'^2(\xi)\, d\xi.$$

Choisissons maintenant $y \in [0, l]$ tel que les coefficients en les intégrales des deux inégalités soient égaux. Ceci aura lieu pour $y = y_0$, où

$$y_0 = \frac{l\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1}}.$$

Ajoutant les inégalités précédentes pour cette valeur de y, on obtient

$$\int_0^l v^2(x)\, dx \leqslant \frac{l(1+\varepsilon_0)\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_0}}\, v^2(0) +$$

$$+ l \frac{(1+\varepsilon_1)\sqrt{1+1/\varepsilon_0}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1}}\, v^2(l) + \frac{l^2}{2} \frac{(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}{(\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1})^2} \int_0^l v'^2(x)\, dx.$$

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. Appliquons maintenant cette idée à une fonction discrète $v(x)$ sur $\bar{\omega}$. Comme le point $y = y_0$ est susceptible de ne pas appartenir au réseau $\bar{\omega}$, il nous faudra compliquer les raisonnements.

Toute fonction discrète $v(x) = v_i$ vérifie

$$v_i = v_0 + \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j} h_j.$$

Elevant au carré les deux membres de cette identité et estimant le second à l'aide de l'inégalité de Cauchy (15) § 1 et de ε-inégalité (16) § 1, on aura

$$v_i^2 \leqslant (1+\varepsilon_0) v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0) x_i \sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \tag{6}$$

Soit $x_k \in \bar{\omega}$. Pour $x_i \leqslant x_{k-1}$ on déduit de (6)

$$v_i^2 \leqslant (1+\varepsilon_0) v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0) x_i \sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},j} h_j.$$

Multipliant cette inégalité par $\hbar_j$, sommant sur i entre 0 et $k-1$ et remarquant que

$$\sum_{j=1}^{k-1} x_j \hbar_j = \sum_{j=1}^{k-1} x_j \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} = \frac{x_k x_{k-1}}{2},$$

on obtient

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \hbar_j \leqslant (1+\varepsilon_0)\left(x_k - \frac{h_k}{2}\right) v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0) \frac{x_k x_{k-1}}{2} \sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \tag{7}$$

Posons maintenant $i = k$ dans (6), multiplions-la par $\varepsilon\hbar_k$, où $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, et ajoutons à (7):

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \hbar_j + \varepsilon v_k^2 \hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_0)\left(x_k - \frac{h_k}{2} + \varepsilon\hbar_k\right) v_0^2 +$$

$$+ (1+1/\varepsilon_0) \frac{x_k (x_{k-1} + 2\varepsilon\hbar_k)}{2} \sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},k}^2 h_k. \tag{8}$$

Posons

$$\eta = x_k - \frac{h_k}{2} + \varepsilon\hbar_k = x_k - (1-\varepsilon)\frac{h_k}{2} + \varepsilon\frac{h_{k+1}}{2} \tag{9}$$

et remarquons que pour $x \in \bar{\omega}$ et $\varepsilon \in [0, 1]$, η peut prendre des valeurs quelconques dans $[0, l]$. Il est aisé de vérifier que

$$x_k (x_{k-1} + 2\varepsilon\hbar_k) = x_k^2 + x_k(-(1-\varepsilon) h_k + \varepsilon h_{k+1}) \leqslant \eta^2.$$

En tenant compte de cette circonstance, on déduit de (8)

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \hbar_j + \varepsilon v_k^2 \hbar_k \leqslant (1+\varepsilon_0)\eta v_0^2 + (1+1/\varepsilon_0)\frac{\eta^2}{2} \sum_{j=1}^{k} v_{\bar{x},j}^2 h. \tag{10}$$

En reprenant les mêmes raisonnements, de l'identité

$$v_i = v_N - \sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x},j} h_j$$

on déduit l'inégalité

$$\sum_{j=h+1}^{N} v_j^2 \hbar_j + (1-\varepsilon) v_h^2 \hbar_h \leqslant (1+\varepsilon_1)(l-\eta) v_N^2 +$$

$$+ (1+1/\varepsilon_1) \frac{(l-\eta)^2}{2} \sum_{j=h+1}^{N} v_{\bar{x},j}^2 h_j. \tag{11}$$

Posant

$$\eta = \frac{l\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1}}$$

dans les inégalités (10) et (11) et les ajoutant on obtient, toutes transformations faites:

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{2\varepsilon_0}{l}\left(1+\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_0}{1+1/\varepsilon_1}}\right) v^2(0) +$$

$$+ \frac{2\varepsilon_1}{l}\left(1+\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_1}{1+1/\varepsilon_0}}\right) v^2(l) \geqslant \frac{2(\sqrt{1+1/\varepsilon_0}+\sqrt{1+1/\varepsilon_1})^2}{l^2(1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)} \|v\|_0^2.$$

Reste à exprimer ε_0 et ε_1 au moyen de $\varkappa_0$ et $\varkappa_1$. On obtient ces expressions en supposant que le coefficient en $v^2(0)$ est égal à $\varkappa_0$ et le coefficient en $v^2(l)$ à $\varkappa_1$, i.e.

$$\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_0}{1+1/\varepsilon_1}} = \frac{l\varkappa_0}{2\varepsilon_0} - 1 \equiv \frac{\bar{\varkappa}_0}{\varepsilon_0} - 1,$$

$$\sqrt{\frac{1+1/\varepsilon_1}{1+1/\varepsilon_0}} = \frac{l\varkappa_1}{2\varepsilon_1} - 1 \equiv \frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1} - 1, \tag{12}$$

où

$$\bar{\varkappa}_0 = l\varkappa_0/2, \quad \bar{\varkappa}_1 = l\varkappa_1/2.$$

Les formules (12) entraînent

$$\frac{\bar{\varkappa}_0}{\varepsilon_0} - 1 = \left(\frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1} - 1\right)^{-1}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\bar{\varkappa}_0} + \frac{1}{\bar{\varkappa}_0}\left(\frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1} - 1\right)^{-1}. \tag{13}$$

Portant ε_0^{-1} dans la seconde des équations (12) et élevant les deux membres au carré, on obtient l'équation en ε_1

$$(1+1/\bar{\varkappa}_0)\bar{\varkappa}_1^2/\varepsilon_1 = 2\bar{\varkappa}_1 + \bar{\varkappa}_1/\bar{\varkappa}_0 + 1.$$

D'où

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{\varkappa}_0^2(\bar{\varkappa}_1+1)}{2\bar{\varkappa}_0\bar{\varkappa}_1 + \bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1}.$$

Portant cette expression de ε_1, dans (13), il vient

$$\varepsilon_0 = \frac{\bar{\varkappa}_0^2 (\bar{\varkappa}_1 + 1)}{2\bar{\varkappa}_0\bar{\varkappa}_1 + \bar{\varkappa}_0 + \bar{\varkappa}_1}.$$

Exprimons au moyen de $\varkappa_0$ et $\varkappa_1$ la constante

$$M_2 = \frac{2\left(\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1}\right)^2}{l^2 (1+1/\varepsilon_0)(1+1/\varepsilon_1)}.$$

Les formules (12) entraînent

$$\frac{\varkappa_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_0}}, \quad \frac{\bar{\varkappa}_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{1+1/\varepsilon_0} + \sqrt{1+1/\varepsilon_1}}{\sqrt{1+1/\varepsilon_1}},$$

donc

$$M_2 = \frac{1}{l^2}\, 2\bar{\varkappa}_0\bar{\varkappa}_1 / \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1 (1+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_1)}.$$

Portant ici les valeurs de ε_0 et ε_1, on obtient

$$M_2 = \frac{8(\varkappa_0 + \varkappa_1 + l\varkappa_0\varkappa_1)^2}{l(2+l\varkappa_0)(2+l\varkappa_1)(2\varkappa_0 + 2\varkappa_1 + l\varkappa_0\varkappa_1)}.$$

Ce qui démontre l'inégalité (3).

L'inégalité (5) se déduit de (3) si on pose dans cette dernière $v(0) = v(l) = 0$ et que l'on passe à la limite dans (4) pour $\varkappa_0 \to \infty$ et $\varkappa_1 \to \infty$. Le lemme est démontré.

Remarque 1. Supposons que la fonction discrète $v(x)$ s'annule en l'une des extrémités de l'intervalle $[0, l]$, par exemple en $x = 0$. Dans la formule (4) on peut passer à la limite pour $\varkappa_0 \to \infty$

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \varkappa_1 v^2(l) \geqslant M_3 \|v\|_0^2, \text{ où } M_3 = \frac{8}{l^2}\left(\frac{1+l\varkappa_1}{2+l\varkappa_1}\right)^2. \tag{14}$$

Remarque 2. Sous les mêmes hypothèses on peut minorer $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ au moyen de $\|v\|_0^2$. Pour cela il faut poser $\varkappa_1 = 0$ dans (14):

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant \frac{2}{l^2}\|v\|_0^2. \tag{15}$$

Remarque 3. Si dans (3) on pose $\varkappa_0 = 0$ par exemple, la minoration s'écrit

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \varkappa_1 v^2(l) \geqslant M_4 \|v\|_0^2, \text{ où } M_4 = \frac{2\varkappa_1}{l(2+l\varkappa_1)}. \tag{16}$$

Lemme 3 (inégalité de Poincaré). *Pour toute fonction discrète $v(x)$ sur un réseau irrégulier $\bar{\omega}$, on a*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant \frac{4}{l^2}\|v\|_0^2 - \frac{4}{l}(v, 1)_0^2. \tag{17}$$

Démonstration. Soient x_i et x_k deux nœuds quelconques du réseau $\overline{\omega}$. Vu que pour $x_i < x_k$

$$(v_i - v_k)^2 = \Big(\sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar{x}},\ {}_jh_j\Big)^2 \leqslant (x_k - x_i) \sum_{j=i+1}^{k} v_{\bar{x}}^2,\ {}_jh_j,$$

et pour $x_i > x_k$

$$(v_i - v_k)^2 = \Big(\sum_{j=k+1}^{i} v_{\bar{x}},\ {}_jh_j\Big)^2 \leqslant (x_i - x_k) \sum_{i=k+1}^{i} v_{\bar{x}}^2,\ {}_jh_j,$$

on a toujours

$$(v_i - v_k)^2 \leqslant |x_i - x_k|\, \|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Multipliant cette inégalité par $\hbar_i$ et sommant sur i entre 0 et N on obtient, toutes réductions faites:

$$\|v\|_0^2 + lv_k^2 - 2v_k\,(v,\ 1)_{\overline{\omega}} \leqslant \frac{l^2}{2}\,\|v_{\bar{x}}\|_0^2,$$

puisque

$$\sum_{i=0}^{N} |x_i - x_k|\,\hbar_i = \int_0^l |t - x_k|\,dt = \int_0^{x_k} (x_k - t)\,dt + \int_{x_k}^{l} (t - x_k)\,dt =$$

$$= \frac{l^2}{2} - (l - x_k)\,x_k \leqslant \frac{l_2}{2}.$$

Multipliant maintenant par $\hbar_k$ et sommant sur k de 0 à N, il vient

$$2l\,\|v\|_0^2 - 2\,(v,\ 1)_{\overline{\omega}}^2 \leqslant \frac{l^3}{2}\,\|v_{\bar{x}}\|_0^2$$

d'où il résulte (17). Le lemme est démontré.

Lemme 4. *Soit un réseau irrégulier* $\overline{\omega}$ *tel que*

$$\sum_{\overline{\omega}\cap[a,\,b]} \hbar(x) \geqslant m, \tag{18}$$

où $[a,\ b] \subset [0,\ l]$. *Pour toute fonction discrète* $v(x)$ *sur* $\overline{\omega}$, *on a*

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \mu \sum_{\overline{\omega}\cap[a,\,b]} v^2\hbar \geqslant M_5\,\|v\|_0^2, \tag{19}$$

où $M_5 = \dfrac{2m\mu}{(2 + lm\mu)\,l}$, *et* $\mu = \text{const} > 0$.

Démonstration. Pour $x_i \leqslant x_k$

$$v_i^2 = \Big(v_k - \sum_{j=i+1}^{k} v_{k\bar{x}},\ {}_jh_j\Big)^2 \leqslant (1+\varepsilon)\,v_k^2 + (1 + 1/\varepsilon)\Big(\sum_{j=i+1}^{k} v_x,\ {}_jh_j\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\,v_k^2 + 1 + 1/\varepsilon)\,|x_i - x_k|\,\|v_x\|^2.$$

Il est immédiat de vérifier que cette inégalité vaut aussi pour $x_i \geqslant x_h$. Multiplions-la par $\hbar_i$ et sommons sur i de 0 à N:

$$\|v\|_0^2 \leqslant l(1+\varepsilon)v_h^2 + (1+1/\varepsilon)\|v_{\bar{x}}\|_0^2(|x_h - x_i|, 1) \leqslant$$
$$\leqslant l(1+\varepsilon)v_h^2 + (1+1/\varepsilon)\frac{l^2}{2}\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Une multiplication par $\hbar_h$ et une sommation sur $x_h \in \bar{\omega} \cap [a, b]$ donnent

$$\sum_{\bar{\omega}\cap[a,b]} \hbar\|v\|_0^2 \leqslant l(1+\varepsilon)\sum_{\bar{\omega}\cap[a,b]} v^2(x)\hbar + (1+1/\varepsilon)\frac{l^2}{2}\sum_{\bar{\omega}\cap[a,b]} \hbar|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

En utilisant maintenant la condition (18) et en supposant $\varepsilon = \mu lm/2$, on obtient (19). Le lemme est démontré.

Lemme 5. *Pour toute fonction discrète $v(x)$ sur un réseau régulier $\bar{\omega}$ de pas h, nulle en $x = 0$ et $x = l$, on a*

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant M_6\|v\|_0^2, \quad M_6 = \left[\frac{2\sin(\pi h/2l)}{h}\right]^4. \tag{20}$$

Démonstration. En vertu de (9) § 4 quel que soit $\varepsilon > 0$

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\|v_{\bar{x}}\|_0^2 - \frac{1}{4\varepsilon^2}\|v\|_0^2,$$

et en vertu du lemme 1

$$\|v_{\bar{x}}\|_0^2 \geqslant M_1\|v\|_0^2, \quad \text{où} \quad M_1 = \left[\frac{2\sin(\pi h/(2l))}{h}\right]^2.$$

Estimant $\|v_{\bar{x}}\|_0^2$ dans la première des inégalités à l'aide de la seconde, on obtient

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \left(\frac{M_1}{\varepsilon} - \frac{1}{4\varepsilon^2}\right)\|v\|_0^2.$$

Choisissons ε tel que le coefficient en $\|v\|_0^2$ soit maximal: $\varepsilon = 1/(2M_1)$. Portant cette valeur de ε dans la dernière inégalité, on arrive à (20). C.Q.F.D.

Lemme 6. *Pour toute fonction discrète $v(x)$ sur un réseau régulier $\bar{\omega}$ de pas h, nulle en $x = 0$ et $x = h$, on a*

$$\|v_{\bar{x}x}\|_0^2 \geqslant \frac{12}{l^4}\|v\|_0^2.$$

Démonstration. Tenant compte de $v(0) = 0$, écrivons la formule

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} hv_{\bar{x},j} \sum_{j=1}^{i} hx_{\bar{x},j}v_{\bar{x},j}$$

et transformons-la à l'aide de (11) § 1 en posant dans cette dernière $m = 0$, $n = i$, $a \equiv 1$, $u \equiv v$, $v \equiv x$:

$$v_i = x_i v_{\bar{x},i} - \sum_{j=1}^{i-1} x_j v_{\bar{x}x,j} h.$$

Comme $v_{\bar{x}}(h) = 0$, il vient

$$v_{\bar{x},i} = \sum_{j=1}^{i-1} v_{\bar{x}x,j} h.$$

Portant cette expression dans la précédente, on obtient

$$v_i = \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j) v_{\bar{x}x,j} h.$$

D'où il suit

$$\|v\|_0^2 = \sum_{i=2}^{N-1} h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j) v_{\bar{x}x,j} h \right\}^2 + \frac{h}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} h (x_N - x_j) v_{\bar{x}x,j} \right\}^2.$$

Evaluons les sommes du second membre. En utilisant l'inégalité de Cauchy (15) § 1, on s'assure que quel que soit $i = 2, \ldots, N-1$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j) v_{\bar{x}x,j} h \right\}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)^2 h \| v_{\bar{x}x,j} \|_0^2.$$

Cette majoration nous permet de déduire de la dernière identité

$$\|v\|_0^2 \leqslant M \| v_{\bar{x}x} \|_0^2,$$

où

$$M = \sum_{j=1}^{N-1} h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} h (x_i - x_j)^2 + \frac{h}{2} (x_N - x_i)^2 \right\}.$$

Le calcul montre que

$$M = \frac{h^4}{12} N (N-1)(N^2 - N + 1) < \frac{l^4}{12},$$

ce qui entraîne la proposition du lemme.

2. Fonctions discrètes de deux arguments. Nous étudierons ici des fonctions discrètes sur un réseau rectangulaire $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ tramant le rectangle

$$G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

On se servira des notations du pt. 2 § 4.

L e m m e 7 (inégalité de Friederichs). *Pour toute fonction discrète $v(x)$ sur un réseau rectangulaire irrégulier $\bar{\omega}$, nulle sur la frontière*

γ, *on a*

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant (8/l_1^2 + 8/l_2^2)\|v\|_0^2. \tag{21}$$

Démonstration. En vertu de (5), pour la fonction $v(x) = v(x_1, x_2)$ à x_2 fixe on a

$$\sum_{x_1 \in \omega_1^+} (v_{\bar{x}}(x_1, x_2))\, h_1(x_1) \geqslant \frac{8}{l_1} \sum_{x_1 \in \bar{\omega}_1} v^2(x_1, x_2)\, \hbar_1(x_1).$$

Multipliant par $h_2(x_2)$ et sommant sur $x_2 \in \bar{\omega}_2$ il vient

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 \geqslant (8/l_1^2)\|v\|_0^2.$$

De façon analogue

$$\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 \geqslant (8/l_2^2)\|v\|_0^2.$$

Ajoutant les deux dernières expressions, on obtient l'inégalité (21). C.Q.F.D.

Lemme 8 (inégalité de Poincaré). *Pour toute fonction discrète $v(x)$ sur un réseau rectangulaire irrégulier $\bar{\omega}$, on a*

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant \frac{4}{l_1^2 + l_2^2}\|v\|_0^2 - \frac{4}{l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)}(v, 1)_{\bar{\omega}}^2. \tag{22}$$

Démonstration. Soient $x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$ et $x_j = (x_1^{(j_1)}, x_2^{(j_2)})$ deux nœuds quelconques du réseau $\bar{\omega}$. Pour toute fonction $v(x)$ on a *)

$$[v_i - v_j]^2 = [\operatorname{sign}(i_1 - j_1) \sum_{k_1 = m_1+1}^{n_1} h_1 v_{x_1, k_1, i_2} + \\ + \operatorname{sign}(i_2 - j_2) \sum_{k_2 = m_2+1}^{n_2} h_2 v_{\bar{x}_2, j_1, k_2}],$$

où

$$m_\alpha = \min\{i_\alpha, j_\alpha\}, \quad n_\alpha = \max\{i_\alpha, j_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2.$$

ε-inégalité (16) § 1 et l'inégalité de Cauchy (15) § 1 entraînent

$$[v(x) - v(y)]^2 \leqslant (1 + \varepsilon)|x_1 - y_1| \sum_{x_1 \in \omega_1^+} h_1 v_{\bar{x}_1}^2(x_1, x_2) + \\ + (1 + 1/\varepsilon)|x_2 - y_2| \sum_{x_2 \in \omega_2^+} h_2 v_{\bar{x}_2}^2(y_1, x_2). \tag{23}$$

*) Ceci est la forme discrète de la relation

$$[v(x) - v(y)]^2 = \left[\int_{y_1}^{x_1} \frac{\partial v(\xi_1, x_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \int_{y_2}^{x_2} \frac{\partial v(y_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} d\xi_2\right]^2$$

qui est évidente pour une fonction d'argument continu.

Multiplions cette inégalité par $h_1(x_1)\ \hbar_2(x_2)\ \hbar_1(y_1)\ \hbar_2(y_2)$ et sommons sur $x \in \bar{\omega}$ et $y \in \bar{\omega}$. Comme

$$\sum_{x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha} |y_\alpha - x_\alpha|\, \hbar_\alpha \leqslant l_\alpha^2/2, \tag{24}$$

il vient

$$2l_1l_2 \|v\|_0^2 - 2(v,\ 1)_{\bar{\omega}}^2 \leqslant (1+\varepsilon)\frac{l_1^3 l_2}{2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + (1+1/\varepsilon)\frac{l_1 l_2^3}{2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2.$$

Choisissant maintenant $\varepsilon = (l_2/l_1)^2$ on obtient (22). C.Q.F.D.

Lemme 9. *Soit $\tilde{\omega} \subset \bar{\omega}$ un ensemble de nœuds du réseau $\bar{\omega}$ tel que*

$$\sum_{\omega} \hbar_1 \hbar_2 \geqslant m. \tag{25}$$

Ceci étant pour toute fonction $v(x)$ sur $\bar{\omega}$, on a

$$\|\nabla v\|_0^2 + \mu \sum_{\tilde{\omega}} v^2 \hbar_1 \hbar_2 \geqslant M_7 \|v\|_0^2, \tag{26}$$

où $\mu = \text{const} > 0$ est arbitraire et

$$M_7 = \frac{2m\mu}{l_1 l_2 [2 + \mu(l_1^2 + l_2^2)]}.$$

Démonstration. Soient $x = (x_1,\ x_2)$ et $y = (y_1,\ y_2)$ deux nœuds quelconques du réseau $\bar{\omega}$. On sait que

$$[v(x) - v(y)]^2 \geqslant (1-\varepsilon_1)\, v^2(x) - (1/\varepsilon_1 - 1)\, v^2(y),$$

d'où, en vertu de (23), il résulte

$$(1-\varepsilon_1)\, v^2(x) \leqslant (1/\varepsilon_1 - 1)\, v^2(y) + (1+\varepsilon_2)\,|x_1 - y_1| \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2(x_1, x_2)\, h_1 +$$
$$+ (1 + 1/\varepsilon_2)\,|x_2 - y_2| \sum_{\omega_2^+} v_{\bar{x}_2}^2(y_1,\ x_2)\, h_2.$$

Multipliant cette inégalité par $\hbar_1\ \hbar_2$, sommant sur $x \in \bar{\omega}$ et tenant compte de (24), il vient

$$(1-\varepsilon_1)\|v\|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1)\, v^2(y) + (1+\varepsilon_2)\frac{l_1^2}{2}\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 +$$
$$+ (1 + 1/\varepsilon_1)\frac{l_1 l_2^2}{2} \sum_{\omega_2^+} v_{\bar{x}_1}^2(y_1,\ x_2)\, h_2. \tag{27}$$

Multiplions par $\hbar_1 \hbar_2$ et sommons sur $y \in \tilde{\omega}$. Effectuant quelques majorations, on obtient

$$(1-\varepsilon_1) \sum_{\tilde{\omega}} \hbar_1 \hbar_2 \|v\|_0^2 \leqslant (1/\varepsilon_1 - 1)\, l_1 l_2 \sum_{\tilde{\omega}} v^2 \hbar_1 \hbar_2 +$$
$$+ (1+\varepsilon_2)\frac{l_1^3 l_2}{2}\|v_{x_1}\|_0^2 + (1 + 1/\varepsilon_2)\frac{l_1 l_2^3}{2}\|v_{\bar{x}_2}\|_0^2.$$

En posant $\varepsilon_2 = (l_2/l_1)^2$, il vient

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\widetilde{\omega}} \hbar_1\hbar_2 \|v\|_0^2 \leqslant (1/\varepsilon_1 - 1)\, l_1 l_2 \sum_{\widetilde{\omega}} v^2 \hbar_1 \hbar_2 + \frac{l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)}{2} \|\nabla v\|_0^2 .$$

Choisissant ε_1 à partir de la condition $(1/\varepsilon_1 - 1) = \mu (l_1^2 + l_2^2)/2$ et tenant compte de (25), on obtient la minoration (26). C.Q.F.D.

Lemme 10. *Soit $\widetilde{\gamma} \subset \gamma$ un ensemble de nœuds frontière, et un réseau irrégulier tel que*

$$\sum_{\widetilde{\gamma}} \tau(x) \geqslant m, \tag{28}$$

où $\tau(x)$ est défini par (22) § 4. *Pour toute fonction $v(x)$ sur $\overline{\omega}$ on a*

$$\|\nabla v\|_0^2 + \mu \sum_{\widetilde{\gamma}} v^2 \tau \geqslant M_8 \|v\|_0^2, \tag{29}$$

où

$$M_8 = \frac{m\mu}{l_1 l_2 + \mu (l_1^2 + l_2^2)(l_1 + l_2)},$$

et μ une constante positive. En particulier, si $v(x) = 0$ pour $x \in \widetilde{\gamma}$, la fonction $v(x)$ est telle que

$$\|\nabla v\|_0^2 \geqslant \frac{m}{(l_1 + l_2)(l_1^2 + l_2^2)} \|v\|_0^2 . \tag{30}$$

Démonstration. La fonction $v(x)$ vérifie (27) de même que l'inégalité suivante qui se démontre de façon analogue

$$(1-\varepsilon_1)\|v\|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1)\, v^2(y) + \\ + (1+\varepsilon_2)\frac{l_1^2 l_2}{2} \sum_{\omega_1^+} v_{\bar{x}_1}^2 (x_1, y_2) + (1 + 1/\varepsilon_2)\frac{l_2^2}{2} \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 . \tag{31}$$

Soit $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}^{(1)} \cup \widetilde{\gamma}^{(2)}$, où $\widetilde{\gamma}^{(\alpha)}$ est un ensemble de nœuds γ situés sur la droite $x_\alpha = 0$ ou $x_\alpha = l_\alpha$. Multiplions (27) par $\hbar_1(y_1)$ et sommons sur $\widetilde{\gamma}^{(2)}$. On obtient l'inégalité

$$(1-\varepsilon_1) \sum_{y_1 \in \widetilde{\gamma}^{(2)}} \hbar_1(y_1) \|v\|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1) \sum_{y_1 \in \widetilde{\gamma}^{(2)}} v^2(y)\, \hbar_1 + \\ + (1+\varepsilon_2)\, l_1^3 \|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + (1 + 1/\varepsilon_2)\, l_1 l_2^2 \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 .$$

Multipliant les deux membres de (31) par $\hbar_2(y_2)$ et sommant ensuite sur $\widetilde{\gamma}^{(1)}$, on obtient

$$(1-\varepsilon_1) \sum_{y_2 \in \widetilde{\gamma}^{(1)}} \hbar_2(y_2) \|v\|_0^2 \leqslant l_1 l_2 (1/\varepsilon_1 - 1) \sum_{y_2 \in \widetilde{\gamma}^{(1)}} \hbar_2 v^2(y) + \\ + (1+\varepsilon_2)\, l_1^2 l_2 \|v_{\bar{x}_1}\|_0^2 + (1/\varepsilon_2 + 1)\, l_2^2 \|v_{\bar{x}_2}\|_0^2 .$$

Ajoutant les deux dernières inégalités, il vient

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\gamma}}\tau\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)\sum_{\tilde{\gamma}}v^2(x)\tau+$$
$$+(1+\varepsilon_2)l_1^2(l_1+l_2)\|v_{\bar{x}_1}\|_0^2+(1+1/\varepsilon_2)l_2^2(l_1+l_2)\|v_{\bar{x}}\|_0^2.$$

Posant maintenant $\varepsilon_2=(l_2/l_1)^2$, il vient

$$(1-\varepsilon_1)\sum_{\tilde{\gamma}}\tau\|v\|_0^2\leqslant l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)\sum_{\tilde{\gamma}}v^2(x)\tau(x)+$$
$$+(l_1^2+l_2^2)(l_1+l_2)\|\nabla v\|_0^2. \quad (32)$$

Choisissant ε_1 à partir de la condition

$$l_1l_2(1/\varepsilon_1-1)=\mu(l_1+l_2)(l_1^2+l_2^2)$$

et tenant compte de la condition (28), on obtient la minoration (29).

Supposons maintenant que $v(x)=0$ pour $x\in\tilde{\gamma}$. Le premier terme du second membre de (32) disparaît. Comme ε_1 est un nombre non négatif quelconque, en posant $\varepsilon_1=0$ et en tenant compte de (28), on déduit (30). C.Q.F.D.

Voir aussi [2], [5], [11].

CHAPITRE VI

ESTIMATIONS À PRIORI

Au chapitre IV on a construit des approximations discrètes pour un grand nombre de problèmes de physique mathématique. Une fois qu'on a construit le schéma discret et étudié son erreur d'approximation, il faut estimer la vitesse de convergence de la solution discrète vers la solution exacte. On a vu que cette estimation pouvait être déduite d'une estimation à priori pour ce schéma. Le présent chapitre est consacré précisément à la déduction d'estimations à priori pour certains schémas discrets du chapitre IV. Ces estimations à priori revêtent essentiellement un caractère illustratif et n'englobent qu'une partie seulement des problèmes traités au chapitre IV. Cependant les problèmes abordés sont typiques dans la mesure où les méthodes d'estimation peuvent être généralisées à une classe plus vaste.

Dans ce paragraphe on se penche sur deux méthodes de déduction d'estimations à priori : la méthode des inégalités de l'énergie et la méthode de la fonction de Green. Il existe une troisième méthode très souvent utilisée, qui est basée sur le principe du maximum ; nous l'avons exposée au chapitre III. Par ailleurs au § 2 du chapitre V, on a traité des exemples sur lesquels on a vu comment se servir de la méthode des inégalités de l'énergie pour déduire des estimations à priori pour des modèles unidimensionnels d'équations discrètes du second et du quatrième ordre.

§ 1. Méthode des inégalités de l'énergie

L'objet de ce paragraphe est la méthode des inégalités de l'énergie. Les problèmes abordés sont supposés donnés sur un réseau rectangulaire régulier $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$. On considère un schéma discret approchant le premier problème aux limites pour une équation du second ordre à dérivées mixtes, des schémas discrets du quatrième ordre d'approximation pour l'équation de Poisson et pour une équation à dérivées mixtes (à coefficients constants), des schémas discrets approchant le deuxième et le troisième problème aux limites pour une équation du second ordre sans dérivées mixtes.

1. Introduction. Considérons deux nouvelles normes de fonctions discrètes qui nous aideront dans ce paragraphe à établir des estimations à priori :

$$\|\varphi\|_{-1} = \sup_{v|_\gamma=0} \frac{|(\varphi, v)_\omega|}{\|v\|_1}, \qquad \|\varphi\|_{-1}^{\circ} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(\varphi, v)_{\bar\omega}|}{\|v\|_1}.$$

Les autres normes utilisées ont été introduites au § 4 chapitre V.

Prouvons la proposition subsidiaire suivante.

Lemme 1. *Pour toute fonction discrète $v(x)$ sur un réseau régulier $\bar\omega = \bar\omega_1 \times \bar\omega_2$, on a*

$$\|v_{\bar x_\alpha}\|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_\alpha^2}\|v\|_0^2, \qquad \alpha = 1,\ 2.$$

Démonstration. Effectuons la démonstration pour $\alpha = 1$, par exemple. Par définition

$$\|v_{\bar x_1}\|_0^2 = (v_{\bar x_1}, v_{\bar x_1})_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} = \frac{1}{h_1^2}(v - v^{(-1_1)}, \quad v - v^{(-1_1)})_{\omega_1^+\times\bar\omega_2}.$$

Une multiplication membre à membre et l'inégalité de Cauchy donnent

$$\|v_{\bar x_1}\|_0^2 \leqslant \frac{2}{h_1^2}(v^2, 1)_{\omega_1^+\times\bar\omega_2} + \frac{2}{h_1^2}(v^2, 1)_{+\omega_1\times\bar\omega_2} = \frac{4}{h_1^2}\|v\|_0^2.$$

2. Problème de Dirichlet pour une équation autoconjuguée du deuxième ordre à dérivées mixtes. Soit le problème suivant : sur le rectangle $D = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$ on demande de trouver la solution de l'équation

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) - q(x)u = -f(x),\ x \in D, \tag{1}$$

qui vérifie sur la frontière Γ du domaine D la condition

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma. \tag{2}$$

On supposera que pour tous les $x \in \bar D = D \cup \Gamma$ la matrice $\{k_{\alpha\beta}(x)\}$ est symétrique, définie positive et à éléments bornés, i.e. pour tous les $x \in \bar D$

$$\begin{gathered} c_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leqslant \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leqslant c_2(\xi_1^2 + \xi_2^2), \\ c_1 = \text{const} > 0, \quad c_2 = \text{const} > 0. \end{gathered} \tag{3}$$

On supposera par ailleurs que

$$q(x) \geqslant 0,\ x \in D. \tag{4}$$

Supposons que $\bar{D}$ est maillé d'un réseau rectangulaire régulier $\bar{\omega}$. Au chapitre IV on a construit pour l'opérateur L une approximation discrète que nous allons utiliser pour composer un schéma discret pour le problème (1), (2). Plus exactement, soit

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \quad y = g(x), \quad x \in \gamma, \tag{5}$$

où

$$\Lambda y = \frac{1}{2}(\Lambda^- + \Lambda^+) y - dy,$$

$$\Lambda^- y = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x) y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha},$$

$$\Lambda^+ y = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x) y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha},$$

$$\varphi(x) = f(x), \quad d(x) = q(x), \quad x \in \omega.$$

Etudions le problème (5).

Théorème 1. *Le problème* (5) *admet une solution et une seule. La solution du problème* (5) *avec des conditions aux limites homogènes* ($g \equiv 0$) *est telle que*

$$\| y \|_1 \leqslant \frac{1}{c_1} \left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)} \right] \| \varphi \|_{-1}.$$

Démonstration. Soit $v(x)$ une fonction discrète sur $\bar{\omega}$, $v(x) = 0$ pour $x \in \gamma$. La formule de sommation par parties (9) § 1 chapitre V donne

$$(\Lambda^- v, v)_\omega = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} ((k_{\alpha\beta}(x) v_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}, v)_\omega =$$

$$= -\sum_{\alpha, \beta=1}^{2} (k_{\alpha\beta}(x) v_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha})_{\omega_1 \times \omega_2}.$$

De là et en vertu de (3), il vient

$$c_1 \| \nabla v \|_0^2 \leqslant -(\Lambda^- v, v)_\omega.$$

De façon analogue on montre

$$c_1 \| \nabla v \|_0^2 \leqslant -(\Lambda^+ v, v)_\omega.$$

Groupant ces deux inégalités et tenant compte de la condition (4) on obtient

$$c_1 \| \nabla v \|_0^2 \leqslant -(\Lambda v, v)_\omega. \tag{6}$$

L'inégalité (6) et le lemme 7 § 5 chapitre V entraînent

$$\| v \|_1^2 \leqslant -\frac{1}{c_1} \left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)} \right] (\Lambda v, v)_\omega. \tag{7}$$

D'où il résulte que si $\Lambda v \equiv 0$ pour $x \in \omega$, alors $v \equiv 0$ pour $x \in \omega$. Nous avons donc démontré que le problème homogène (5) ne possède que la solution triviale $v(x) \equiv 0$, donc le problème non homogène (3) admet une solution unique quels que soient φ et g.

Estimons maintenant à priori la solution du problème (5) sous réserve que $g(x) \equiv 0$, $x \in \gamma$. Pour cela supposons que $v = y$ dans (7) et tenons compte du fait que $\Lambda y = -\varphi$. On aura

$$\|y\|_1^2 \leqslant \frac{1}{c_1}\left[1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right](\varphi, y)_\omega. \tag{8}$$

Comme

$$|(\varphi, y)_\omega| \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|y\|_1,$$

(8) entraîne l'estimation à priori cherchée. C.Q.F.D.

3. Schémas discrets d'ordre supérieur d'approximation. Considérons le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson sur un rectangle D :

$$\Delta u = -f(x), \ x \in D; \qquad u = g(x), \ x \in \Gamma. \tag{9}$$

Au chapitre III on a construit sur un réseau rectangulaire régulier $\bar{\omega}$ une approximation discrète dont l'erreur était de $O(|h|^4)$ sur les solutions dérivables de l'équation (9). Utilisons cette approximation pour construire un schéma discret pour le problème (9) de la façon suivante :

$$\Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \ x \in \omega, \tag{10}$$

$$y(x) = g(x) \text{ pour } x \in \gamma,$$

où

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

S'agissant du problème (10) avec la condition

$$1/\sqrt{5} \leqslant h_1/h_2 \leqslant \sqrt{5}$$

on a montré l'unicité de la solution et obtenu l'estimation à priori (21) § 4 chapitre III relativement à la métrique de C. Ici on se propose de prouver la solubilité du problème (10) sans contrainte supplémentaire sur le réseau $\bar{\omega}$.

Théorème 2. *Le problème* (10) *admet une solution sur tout réseau régulier* $\bar{\omega}$. *Cette solution est unique et telle que pour* $g(x) \equiv 0$ *on a*

$$\|y\|_1 \leqslant \frac{3}{2}\left(1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right)\|\varphi\|_{-1}, \tag{11}$$

$$\|y\|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2}\|\varphi\|_0, \tag{12}$$

$$\|y\|_C \leqslant M\|\varphi\|_0, \ M = \text{const} > 0. \tag{13}$$

Démonstration. Soit $v(x)$ une fonction discrète sur $\bar{\omega}$, nulle à la frontière, i.e. $v(x) = 0$ pour $x \in \gamma$.
On a

$$(\Lambda' v, v)_\omega = (v_{\bar{x}_1 x_1}, v)_\omega + (v_{\bar{x}_2 x_2}, v)_\omega + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} (v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v)_\omega =$$

$$= -(v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times \omega_2} - (v_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2})_{\omega_1 \times \omega_2^+} +$$

$$+ \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} (v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}, v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} = -\| \nabla v \|_0^2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2.$$

En vertu du lemme 1

$$\| v_{x_1 x_2} \|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_1^2} \| v_{\bar{x}_2} \|_0^2, \quad \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 \leqslant \frac{4}{h_2^2} \| v_{\bar{x}_1} \|_0^2$$

donc

$$(\Lambda' v, v)_\omega \leqslant -\frac{2}{3} \| \nabla v \|_0^2.$$

Le lemme 7 § 5 chapitre V entraîne

$$\| v \|_1^2 \leqslant -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8 (l_1^2 + l_2^2)} \right) (\Lambda' v, v)_\omega. \tag{14}$$

Si donc $\Lambda' v = 0$ pour $x \in \omega$, alors $v(x) \equiv 0$ pour $x \in \omega$. D'où il suit que le problème (10) possède une solution unique quels que soient φ et g. L'estimation (11) découle de (14).

Examinons maintenant l'expression

$$(\Lambda' v, v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega = (v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}, v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega +$$

$$+ \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \{ (v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega + (v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \} =$$

$$= \| v_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 + 2 \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} (\| v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2} \|_0^2). \tag{15}$$

En vertu du lemme 1 il vient

$$\begin{aligned} \| v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2} \|_0^2 &\leqslant \frac{4}{h_1^2} (\| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2), \\ \| v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2} \|_0^2 &\leqslant \frac{4}{h_2^2} (\| v_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2). \end{aligned} \tag{16}$$

Portant (16) dans (15), on obtient

$$(\Lambda' v, v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant \frac{2}{3} (\| v_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| v_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 + 2 \| v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2).$$

Si $v = y$, alors en vertu de (10)

$$\| y_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| y_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 + 2 \| y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 \leqslant \frac{3}{2} | (\varphi, y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_\omega | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2} \| \varphi \|_0 \| y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2.$$

Or

$$\| y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 = \| y_{\bar{x}_1 x_1} \|_0^2 + \| y_{\bar{x}_2 x_2} \|_0^2 + 2 \| y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \|_0^2 \equiv \| y \|_{2,0}^2$$

donc

$$\| y \|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2} \| \varphi \|_0.$$

L'inégalité (13) découle de (12) en vertu du théorème 5 § 4 chapitre V. Le théorème est démontré.

Considérons le problème de Dirichlet pour une équation du second ordre à coefficients constants et dérivée mixte:

$$\begin{gathered} Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = -f(x), \quad x \in D, \quad |\alpha| < 1, \\ u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{17}$$

Lorsque $|\alpha| < 1$ l'équation (17) est elliptique. Au chapitre IV on a construit pour l'équation (17) sur un réseau carré ω de pas h un schéma discret approchant (17) avec une erreur de $O(|h|^4)$ sur les solutions dérivables. Servons-nous de ce schéma et posons le problème discret approximisant le problème (17) de la façon suivante:

$$\begin{gathered} \Lambda' y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \\ + h^2 \frac{1 + 3\alpha + 2\alpha^2}{6} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \\ y = g \text{ pour } x \in \gamma, \end{gathered} \tag{18}$$

où

$$\varphi = f(x) + \frac{h^2}{12} Lf.$$

Etudions le problème (18).

Théorème 3. *Le problème* (18) *admet une solution unique. Pour* $g \equiv 0$ *la solution du problème* (18) *est telle que*

$$\| y \|_1 \leqslant \frac{3}{2(1 - |\alpha|)} \left(1 + \frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}\right) \| \varphi \|_{-1}, \tag{19}$$

$$\| y \|_{2,0} \leqslant \frac{3}{2(1 - |\alpha|)} \| \varphi \|_0, \tag{20}$$

$$\| y \|_C \leqslant M \| \varphi \|_0, \quad M = \text{const} > 0. \tag{21}$$

Démonstration. Transformons l'opérateur Λ'. Remarquons tout d'abord que

$$h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} - y_{x_1 \bar{x}_2} - y_{\bar{x}_1 x_2}. \tag{22}$$

On peut transformer l'opérateur Λ' de telle sorte que le coefficient en $\frac{h^2}{6}\, y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}$ soit

$$1 - 3\,|\,\alpha\,| + 2\alpha^2. \tag{23}$$

En vertu de (22), il vient

$$\begin{aligned}
\Lambda' y + y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha\,(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \\
+ \frac{\alpha + |\,\alpha\,|}{2}\,(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2} - y_{\bar{x}_1 x_2} - y_{x_1 \bar{x}_2}) + \\
+ \frac{h^2}{6}\,(1 - 3\,|\,\alpha\,| + 2\alpha^2)\, y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \\
+ \frac{\alpha - |\,\alpha\,|}{2}\,(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) + \frac{\alpha + |\,\alpha\,|}{2}\,(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}) + \\
+ \frac{h^2}{6}\,(1 - 3\,|\,\alpha\,| + 2\alpha^2)\, y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{2}\,(1 - \operatorname{sign}\alpha)\,\Lambda^- y + \\
+ \frac{1}{2}\,(1 + \operatorname{sign}\alpha)\,\Lambda^+ y + \frac{h^2}{6}\,(1 - 3\,|\,\alpha\,| + 2\alpha^2)\, y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},
\end{aligned} \tag{24}$$

où

$$\Lambda^- y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha\,(y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}),$$

$$\Lambda^+ y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \alpha\,(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}).$$

Soit $v\,(x)$ une fonction discrète sur $\bar{\omega}$ et $v\,(x) = 0$ pour $x \in \gamma$. Comme $|\,\alpha\,| < 1$ on a

$$\begin{aligned}
(\Lambda^- v,\ v)_\omega = -(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times \omega_2} - (v_{\bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_2})_{\omega_1 \times \omega_2^+} - \\
- \alpha\,(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_2})_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} - \alpha\,(v_{\bar{x}_1},\ v_{\bar{x}_2})_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} \leqslant -(1 - |\,\alpha\,|)\,\|\nabla v\|_0^2.
\end{aligned} \tag{25}$$

De façon analogue on montre que

$$(\Lambda^+ v,\ v)_\omega \leqslant -(1 - |\,\alpha\,|)\,\|\nabla v\|_0^2. \tag{26}$$

En vertu du lemme 1

$$h^2\,(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},\ v)_\omega = h^2\,(v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} \leqslant 2\,\|\nabla v\|_0^2. \tag{27}$$

On remarquera que la fonction (23) n'est pas positive pour $0{,}5 \leqslant |\,\alpha\,| < 1$ et positive pour $0 \leqslant |\,\alpha\,| < 0{,}5$. Donc lorsque $0{,}5 \leqslant |\,\alpha\,| < 1$ les expressions (24) à (27) entraînent

$$-(\Lambda' v,\ v)_\omega \geqslant (1 - |\,\alpha\,|)\,\|\nabla v\|_0^2. \tag{28}$$

Pour $0 \leqslant |\alpha| < 0{,}5$

$$-(\Lambda' v,\ v)_\omega \geqslant \left(1 - |\,\alpha\,| - \frac{1 - 3\,|\,\alpha\,| + 2\alpha^2}{3}\right)\|\nabla v\|_0^2. \tag{29}$$

Groupant (28) et (29) pour tous les $|\alpha| < 1$, on aura

$$\frac{2}{3}\,(1 - |\,\alpha\,|)\,\|\nabla v\|_0^2 < -(\Lambda' v,\ v)_\omega. \tag{30}$$

De (30) il vient en vertu du lemme 7 § 5 chapitre V

$$\|v\|_1^2 \leqslant -\frac{3}{2}\left\{\left(1+\frac{l_1^2 l_2^2}{8(l_1^2+l_2^2)}\right)/(1-|\alpha|)\right\}(\Lambda' v,\ v)_\omega. \qquad (31)$$

Si $\Lambda' v = 0$ pour $x \in \omega$, alors (31) entraîne que $v(x) \equiv 0$ lorsque $x \in \omega$. Nous avons donc démontré que le problème (18) admet une solution qui est unique. L'estimation à priori (19) découle de façon évidente de l'inégalité (31).

Prouvons l'estimation à priori (20). Comme $|\alpha| < 1$ il vient

$$(v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + 2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega = (v_{\bar{x}_1 x_1} + 2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1})_\omega + \\ + \|v_{\bar{x}_1 x_2}\|_0^2 \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2. \qquad (32)$$

De façon analogue on trouve

$$(v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + 2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2},\ v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (33)$$

Groupant (32) et (33), on obtient

$$(v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + 2\alpha v_{\bar{x}_1 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant \\ \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (34)$$

De façon analogue on démontre

$$(v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} + 2\alpha v_{x_1 \bar{x}_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant \\ \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (35)$$

Additionnant (34) et (35) et divisant par 2, il vient

$$(\Lambda^- v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 x_2}\|_0^2. \qquad (36)$$

De façon analogue on établit que

$$\Lambda^+ v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega \geqslant (1-|\alpha|)(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (37)$$

Par ailleurs, en vertu du lemme 1

$$h^2(v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2},\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega = -h^2(\|v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2}\|_0^2) \geqslant \\ \geqslant -2(\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2). \qquad (38)$$

Comme pour la démonstration de l'inégalité (30), on trouve

$$\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_0^2 + 2\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_0^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2 \leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{1-|\alpha|}(\Lambda' v,\ v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2})_\omega. \qquad (39)$$

En faisant $v(x) = y(x)$ dans (39), on déduit de façon classique la majoration (20). La majoration (21) découle, quant à elle, de (20) en vertu du théorème 5 § 4 chapitre V.

3. Troisième problème aux limites pour une équation autoconjuguée du second ordre sans dérivées mixtes sur un rectangle. Soit le problème

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u = -f(x), \quad x \in D, \tag{40}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \varkappa(s)\, u - g(s), \qquad s \in \Gamma, \tag{41}$$

où $\partial/\partial N$ est l'opérateur de la dérivée suivant la conormale intérieure à la frontière Γ, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \begin{cases} k_\alpha(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1,\ 2, \end{cases}$$

s est la longueur d'arc de la frontière Γ mesurée à partir du point de coordonnées (0, 0) dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x)\, u.$$

On supposera que les coefficients du problème (40), (41) vérifient les conditions

$$k_\alpha(x) \geqslant c_1 > 0, \quad q_\alpha(x) \geqslant 0, \quad \varkappa(s) \geqslant 0. \tag{42}$$

Posons

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ \Lambda_\alpha^- y = \dfrac{2}{h_\alpha}\left[a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha} - \left(\varkappa_{-\alpha} + \dfrac{1}{2} h_\alpha d_\alpha\right) y\right], & x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^+ y = \dfrac{2}{h_\alpha}\left[-a_\alpha y_{x_\alpha} - \left(\varkappa_{+\alpha} + \dfrac{1}{2} h_\alpha d_\alpha\right) y\right], & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

L'approximation discrète du problème (40), (41) peut se mettre sous la forme

$$\overline{\Lambda} y = -\Phi(x), \quad x \in \overline{\omega}, \tag{43}$$

où

$$\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_1 + \overline{\Lambda}_2, \quad \Phi(x) = \varphi(x) + \delta(\gamma)\, g(x),$$

et $\delta(\gamma)$, l'analogue discret de la fonction delta concentrée sur la frontière, i.e. $(v, \delta(\gamma))_{\overline{\omega}} = (v, 1)_\gamma$.

Théorème 4. *Si pour toute fonction $v(x)$ sur $\overline{\omega}$ on a uniformément en $|h|$*

$$-(\overline{\Lambda} v, v)_{\overline{\omega}} \geqslant c \|v\|_1^2, \quad c = \text{const} > 0, \tag{44}$$

le problème (43) *admet une solution unique telle que*

$$\|y\|_1^2 \leqslant M(\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2), \quad M = \text{const} > 0. \tag{45}$$

Démonstration. De (43) et (44) il suit que si $\Phi(x) \equiv 0$ pour $x \in \bar{\omega}$, alors $v(x) \equiv 0$ pour $x \in \omega$. Donc le problème (43) admet une solution unique.

Multiplions scalairement (43) par y

$$-(\bar{\Lambda} y, y)_{\bar{\omega}} = (\Phi, y)_{\bar{\omega}} \equiv (\varphi, y)_{\bar{\omega}} + (g, y)_{\gamma}. \tag{46}$$

La définition de la norme $\|\cdot\|_{-1}$ et ε-inégalité (16) § 1 chapitre V entraînent

$$|(\varphi, y)_{\bar{\omega}}| \leqslant \|\varphi\|_{-1} \|y\|_1 \leqslant \varepsilon \|y\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_{-1}^2. \tag{47}$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy (15) § 1 chapitre V et de ε-inégalité (16) § 1 chapitre V il vient

$$|(g, y)_{\gamma}| \leqslant \varepsilon \|y\|_0'^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|g\|_0'^2. \tag{48}$$

Le théorème du § 4 chapitre V entraîne

$$\|y\|_0'^2 \leqslant M_2 \|y\|_1^2. \tag{49}$$

Portant (47), (48) et (49) dans (46) et tenant compte de (44) pour $\varepsilon = c/(2(1 + M_2))$, on obtient (45). Le théorème est démontré.

Théorème 5. *Si*

$$dx \equiv \varkappa(x) \equiv 0 \tag{50}$$

et si pour toute fonction $v(x)$ sur $\bar{\omega}$, on a uniformément en $|h|$

$$-(\bar{\Lambda} v, v)_{\bar{\omega}} \geqslant c \|\nabla v\|_0^2, \quad c = \text{const} > 0, \tag{51}$$

alors le problème (43) *admet une solution sous réserve que*

$$(\Phi, 1)_{\bar{\omega}} \equiv (\varphi, 1)_{\bar{\omega}} + (g, 1)_{\gamma} = 0. \tag{52}$$

Cette solution est unique si

$$(y, 1)_{\bar{\omega}} = Q, \tag{53}$$

où Q est une constante fixe. La solution du problème (43), (50) *est telle que*

$$\|y\|_1^2 \leqslant M\{\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0'^2 + (y, 1)^2\}, \tag{54}$$

où $M = \text{const} > 0$.

Démonstration. On reconnaît en $\bar{\Lambda}$ un opérateur autoconjugué. Il est immédiat de vérifier que si la condition (50) est réalisée, zéro est une valeur propre à laquelle est associée une fonction

propre constante. Donc (52) entraîne l'existence et (53) l'unicité de la solution du problème (43).

Multiplions scalairement (43) par y pour obtenir une estimation à priori. Il vient: $-(\overline{\Lambda}y, y)_{\overline{\omega}} = (\varphi, y)_{\overline{\omega}} + (g, y)_{\gamma}$. Estimons le second membre comme dans le théorème 4. Compte tenu de (51) il vient

$$c\|\nabla y\|_0^2 \leqslant \varepsilon(1+M_2)\|y\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon}(\|\varphi\|_{-1}^2 + \|g\|_0^2.$$

Utilisant maintenant l'inégalité de Poincaré (lemme 8 § 5 chapitre V) pour ε suffisamment petit on déduit (54). C.Q.F.D.

La majoration à priori (45) du théorème (4) a été établie sous l'hypothèse de la validité de l'expression (44). Voyons maintenant quelles conditions faut-il imposer aux coefficients du problème (40), (41) pour que l'expression (44) ait lieu.

Théorème 6 (première condition suffisante). *Supposons que les coefficients du problème* (40), (41) *vérifient les conditions* (42) *et que de plus*

$$q(x) \geqslant c_2 > 0, \quad x \in \overline{D}_0, \tag{55}$$

où

$$\overline{D}_0 = \{x = (x_1, x_2) \mid l_{-\alpha} \leqslant x_\alpha \leqslant l_{+\alpha},\ \alpha = 1, 2\} \subset \overline{D}.$$

Si le réseau est choisi tel que la condition du lemme 9 § 5 *chapitre* V *soit réalisée, alors toute fonction discrète* $v(x)$ *sur* $\overline{\omega}$ *est telle que*

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}} \geqslant c\|v\|_1^2, \quad c = \text{const} > 0.$$

Démonstration. En vertu de (55)

$$(d, v^2)_{\overline{\omega}} \geqslant \sum_{\omega \cap \overline{D}_0} dv^2 h_1 \hbar_2 \geqslant c_2 \sum_{\omega \cap \overline{D}_0} v^2 \hbar_1 h_2.$$

Par construction

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}} = \sum_{\omega_1^+} \sum_{\overline{\omega}_2} a_1 v_{\bar{x}_1}^2 h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1} \sum_{\omega_2^+} a_2 v_{\bar{x}_2}^2 \hbar_1 h_2 + (d, v^2)_{\overline{\omega}} + (\varkappa, v^2)_{\gamma}. \tag{56}$$

Les conditions (42), le lemme 9 du § 5 chapitre V et l'inégalité précédente entraînent

$$-(\overline{\Lambda}v, v)_{\overline{\omega}} \geqslant c_1\|\nabla v\|_0^2 + c_2 \sum_{\overline{\omega} \cap D_0} v^2 \hbar_1 \hbar_2 \geqslant c\|v\|_1^2.$$

Le théorème est démontré.

Théorème 7 (deuxième condition suffisante). *Supposons que les coefficients du problème* (40), (41) *vérifient les conditions* (42) *et qu'en outre*

$$\varkappa(s) \geqslant c_3 > 0, \ s \in \Gamma_0, \tag{57}$$

où $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. *Si le réseau est choisi tel que soit réalisée la condition du lemme* 10 § 5 *chapitre* V, *alors toute fonction discrète* $v(x)$ *sur* $\bar{\omega}$ *est telle que*

$$-(\bar{\Lambda}v, v)_{\bar{\omega}} \geqslant c \| v \|_1^2, \quad c = \text{const} > 0.$$

Démonstration. En vertu de la condition (57), on a

$$(\varkappa, v^2)_\gamma \geqslant \sum_{\gamma \cap \bar{\Gamma}_0} \varkappa v^2 \tau \geqslant c_3 \sum_{\gamma \cap \bar{\Gamma}_0} v^2 \tau.$$

De là, de (56), du lemme 9 § 5 chapitre V et en vertu des conditions (42), il résulte que

$$-(\bar{\Lambda}v, v)_{\bar{\omega}} \geqslant c_1 \| \nabla v \|_0^2 + c_3 \sum_{\gamma \cap \bar{\Gamma}_0} v^2 \tau \geqslant c \| v \|_1^2.$$

Le théorème est démontré.

Lemme 2. *Si les conditions* (42) *sont remplies toute fonction* $v(x)$ *sur* $\bar{\omega}$ *est telle que*

$$-(\bar{\Lambda}v, v)_{\bar{\omega}} \geqslant c_1 \| \nabla v \|_0^2.$$

La démonstration découle immédiatement de (56).

Théorème 8. *Si les conditions* (42) *et* (55) *ou* (42) *et* (57) *sont remplies, la solution du problème* (43) *est convergente au sens de la norme de l'espace* W_2^1 *vers une solution suffisamment dérivable du problème* (40), (41) *avec la vitesse* $O(|h|^2)$, *i.e.*

$$\| y - u \|_1 \leqslant M |h|^2.$$

La démonstration découle immédiatement des théorèmes 4, 6 et 7 et du fait que l'erreur d'approximation (problème (43)) est de $O(|h|^2)$.

Considérons le problème (40), (41) avec les conditions (42) et (50). On a déjà souligné que le problème était soluble mais pas pour un choix arbitraire de f et g. Pour que la solution existe il est nécessaire que

$$\int_D f(x)\, dx + \int_\Gamma g(s)\, ds = 0,$$

et pour qu'elle soit unique que

$$\int_D u(x)\, dx = Q = \text{const}. \tag{59}$$

Théorème 9. *Si les conditions* (42) *et* (50) *sont satisfaites, la solution du problème* (43), (52), (53) *avec pour second membre*

$$\Phi = \varphi(x) + \delta(\gamma) g - \{(f, 1)_{\bar{\omega}} + (g, 1)_\gamma\}/\text{mes}\, D,$$

converge au sens de la norme de l'espace W_2^1 *vers une solution suffisamment dérivable du problème* (40), (41), (58), (59) *à la vitesse* $O(|h|^2)$, *i.e.*

$$\|y-u\|_1 \leqslant M\,|h|^2.$$

Démonstration. Pour l'erreur $z=y-u$ de la solution, on a en vertu du théorème 5

$$\|z\|_1^2 \leqslant M\,(\|\psi\|_{-1}^2+\|\psi_\gamma\|_0'^2+(z,1)_{\bar\omega}^2),$$

où ψ est l'erreur d'approximation de l'équation, ψ_γ, l'erreur d'approximation des conditions aux limites. Comme la solution du problème initial est supposée suffisamment différentiable, les fonctions ψ et ψ_γ seront $O(|h|^2)$ si la perturbation du second membre

$$(f,1)_{\bar\omega}+(g,1)_\gamma$$

sera $O(|h|^2)$. Il en va ainsi puisque $(f,1)_{\bar\omega}$ et $(g,1)_\gamma$ sont les formules des trapèzes dont l'erreur est de $O(|h|^2)$. Tenant compte de la condition (58), on déduit

$$(f,1)_{\bar\omega}+(g,1)_\gamma=O(|h|^2).$$

Reste maintenant à estimer $(z,1)_{\bar\omega}^2$. Par définition et en vertu des conditions (53) et (59)

$$(z,1)_{\bar\omega}=(y,1)_{\bar\omega}-(u,1)_{\bar\omega}=\int\limits_D u\,dx-(u,1)_{\bar\omega}=O(|h|^2),$$

puisque $(u,1)_{\bar\omega}$ est la formule des trapèzes. Le théorème est démontré.

4. Premier problème aux limites pour un système d'équations de la théorie de l'élasticité dans un rectangle. Soit D le rectangle défini précédemment, Γ, sa frontière. Supposons que dans D est défini un système d'équations d'équilibre d'un corps élastique isotrope homogène

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\,\partial x_2}+F_1=0, \tag{60}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1\,\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2}+F_2=0$$

et qu'on demande la solution de ce système qui vérifie sur Γ les conditions aux limites homogènes de première espèce

$$u_1|_\Gamma=u_2|_\Gamma=0. \tag{61}$$

Supposons que $\bar D=D\cup\Gamma$ est maillé d'un réseau rectangulaire régulier $\bar\omega$. Au § 4 chapitre IV on a construit sur un tel réseau une approximation discrète du système (60) et on a montré que son er-

reur était de $O(|h|^2)$. Le système d'équations discrètes peut s'écrire

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\,y_{1\bar{x}_1})_{x_1}+(\mu y_{1\bar{x}_2})_{x_2}+\\ +\frac{1}{2}[(\lambda y_{2x_2})_{x_1}+(\lambda y_{2\bar{x}_2})_{\bar{x}_1}+(\mu y_{2x_1})_{x_2}+(\mu y_{2\bar{x}_1})_{\bar{x}_2}]+F_1=0,\\ \frac{1}{2}\,[(\lambda y_{1x_1})_{x_2}+(\lambda y_{1\bar{x}_1})_{\bar{x}_2}+(\mu y_{1x_2})_{x_1}+(\mu y_{1\bar{x}_2})_{\bar{x}_1}]+\\ +(\mu y_{2\bar{x}_1})_{x_1}+((\lambda+2\mu)\,y_{2\bar{x}_2})_{x_2}+F_2=0,\quad x\in\omega.\end{gathered}\tag{62}$$

Les coefficients λ et μ étant constants, on a par exemple

$$(\lambda y_{2x_2})_{x_1}+(\mu y_{2x_1})_{x_2}=(\lambda+\mu)\,y_{2x_1x_2},$$

mais ils nous seront plus utiles pour la suite tels qu'ils ont été écrits dans (62). Complétant le système (62) avec l'approximation des conditions aux limites (61) :

$$y_1\,|_\gamma=y_2\,|_\gamma=0,\tag{63}$$

on obtient le problème discret (62), (63) qui approche le problème (60), (61).

Estimons à priori la solution du problème (62), (63). Pour cela multiplions la première des équations (62) par $y_1(x)\,h_1h_2$, la seconde par $y_2(x)\,h_1h_2$, sommons les expressions obtenues sur le réseau ω, puis ajoutons-les. Transformons les expressions sous le signe somme à l'aide de la première formule discrète de Green (12) § 1 chapitre V et des formules de sommation par parties (8) et (9) du même paragraphe. La transformation de chaque expression ne portera que sur une variable qui sera indiquée par l'indice extérieur de la prise des différences. Tenant compte des conditions aux limites (63) et réduisant les termes semblables, on obtient

$$2W_h=(F_1,\ y_1)_\omega+(F_2,\ y_2)_\omega,\tag{64}$$

où

$$\begin{gathered}W_h\equiv\frac{1}{2}\Big\{2\mu\,(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2)+\\ +\frac{\lambda}{2}((y_{1\bar{x}_1}+y_{2x_2})^2,\ 1)_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2}+\frac{\lambda}{2}((y_{1x_1}+y_{2\bar{x}_2})^2,\ 1)_{+\omega_1\times\omega_2^+}+\\ +\frac{\mu}{2}((y_{1x_2}+y_{2\bar{x}_1})^2,\ 1)_{\omega_1^+\times{}^+\omega_2}+\frac{\mu}{2}((y_{1\bar{x}_2}+y_{2x_1})^2,\ 1)_{+\omega_1\times\omega_2^+}\end{gathered}\tag{65}$$

est l'analogue discret de l'énergie de déformation élastique.

Transformons les deux dernières expressions du second membre de (65). Elevant au carré, puis transformant l'expression $(y_{\alpha x_\beta},\ y_{\beta\bar{x}_\alpha})_\omega$ pour $\alpha\neq\beta$, $\alpha,\beta=1,2$ d'abord avec la formule de sommation par parties (8), § 1 chapitre V sur la variable x_α, et ensuite avec la for-

mule (9) du même paragraphe sur la variable x_β, il vient

$$((y_{\alpha x_\beta}+y_{\beta\bar{x}_\alpha})^2, 1)_{\omega_\alpha^+ \times {}^+\omega_\beta}=\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2+2(y_{\alpha x_\alpha}, y_{\beta\bar{x}_\beta})_\omega.$$

Portant ces expressions dans (65) et négligeant les termes de coefficients $\lambda/2$, on obtient

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2}\{2(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2)+\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2+$$
$$+(y_{1x_1}, y_{2\bar{x}_2})_\omega+(y_{1\bar{x}_1}, y_{2x_2})_\omega.$$

L'inégalité de Cauchy (15) § 1 chapitre V et l'ε-inégalité (16) § 1 chapitre V entraînent

$$|(y_{\alpha x_\alpha}, y_{\beta\bar{x}_\beta})_\omega| \leqslant \frac{1}{2}\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\frac{1}{2}\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2.$$

En tenant compte de ce qui précède, on déduit que

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\|y_{\alpha\bar{x}_\beta}\|_0^2=\frac{\mu}{2}\{\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2\}.$$

Cette inégalité n'est autre que l'analogue discret de l'*inégalité de Korn* pour le premier problème aux limites. Cette inégalité et (64) entraînent

$$\mu(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2) \leqslant |(F_1, y_1)_\omega|+|(F_2, y_2)_\omega|. \tag{66}$$

Estimons les termes du second membre en utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy et ε-inégalité :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}|(F_\alpha, y_\alpha)_\omega| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\varepsilon\|y_\alpha\|_0^2+\|y_2\|_0^2)+\frac{1}{4\varepsilon}\|F_\alpha\|_0^2\right).$$

En vertu du lemme 7 § 5 chapitre V

$$\|y_1\|_0^2+\|y_2\|_0^2 \leqslant (8/l_1^2+8/l_2^2)^{-1}(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2).$$

Les trois dernières inégalités entraînent pour $\varepsilon=\mu(8/l_1^2+8/l_2^2)$:

$$\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2 \leqslant \mu^{-2}(8/l_1^2+8/l_2^2)^{-1}\|F_1\|_0^2+\|F_2\|_0^2).$$

Ceci n'est autre que l'estimation à priori cherchée, estimation qui entraîne la solubilité du problème (62), (63) et la convergence de sa solution vers celle du problème (60), (61) à la vitesse $O(|h|^2)$.

5. Problème aux limites mixte pour un système d'équations de la théorie de l'élasticité dans un rectangle. Posons le problème mixte pour le système d'équations (60). Supposons que dans un rectangle D on demande la solution du système d'équations (60) qui satisfait

sur la frontière Γ les conditions aux limites suivantes:

$$u_1(x) = u_2(x) = 0 \text{ pour } x_2 = l_2,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1 \tag{67}$$
$$\text{et pour } x_1 = 0,\ x_1 = l_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2,$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -f_1, \quad \lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -f_2 \tag{68}$$
$$\text{pour } x_2 = 0,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1.$$

Sur un réseau rectangulaire régulier $\bar{\omega}$, approchons le système d'équations (60) par le système d'équations discrètes (62) et les conditions aux limites (67), par les conditions aux limites discrètes

$$y_1(x) = y_2(x) = 0 \text{ pour } x_2 = l_2,\ x_1 \in \bar{\omega}_1 \tag{69}$$
$$\text{et pour } x_1 = 0,\ x_1 = l_1,\ x_2 \in \bar{\omega}_2.$$

Approchons les conditions aux limites (68) par des relations du type (18) § 4 chapitre IV, relations à propos desquelles on a montré au § 4 chapitre IV qu'elles admettaient une erreur d'approximation de $O(|h|^2)$:

$$\mu(y_{1x_2} + y_{2\overset{\circ}{x}_1}) + \frac{h_2}{2}[((\lambda + 2\mu)y_{1\bar{x}_1})_{x_1} + (\lambda y_{2x_2})_{x_1} + (\mu y_{2x_1})_{x_2}] =$$
$$= -f_1 - \frac{h_2}{2}F_1(x_1, 0), \tag{70}$$

$$\lambda y_{1\overset{\circ}{x}_1} + (\lambda + 2\mu)y_{2x_2} + \frac{h_2}{2}[(\lambda y_{1x_1})_{x_2} + (\mu y_{1x_2})_{x_1} + (\mu y_{2\bar{x}_1})_{x_1}] =$$
$$= -f_2 - \frac{h_2}{2}F_2(x_1, 0)$$

pour $x_2 = 0$, $x_1 \in \omega_1$.

Etudions le problème discret (62), (69), (70) qui approche le problème (60), (67), (68) avec une erreur de $O(|h|^2)$. Multiplions la première des équations (62) par $y_1(x)\,h_1h_2$ et la seconde par $y_2(x)\,h_1h_2$, sommons sur le réseau ω et additionnons. Multiplions ensuite la première des conditions aux limites (70) par $y_1(x_1, 0)\,h_1$ et la seconde par $y_2(x_1, 0)\,h_1$, sommons sur ω_1 et additionnons. Ajoutant maintenant cette expression à la précédente, transformant les expressions sous les signes sommes comme nous l'avons fait au pt. 4 en démontrant (64), et tenant compte des conditions aux limites (69), on obtient

$$2W_h = \sum_{\alpha=1}^{2}(F_\alpha, y_\alpha)_{\bar{\omega}} + \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha|_{x_2=0}\,h_1, \tag{71}$$

où W_h est défini par (65).

Minorons W_h. Les expressions figurant dans W_h avec le facteur $\lambda/2$ étant non négatives, il vient

$$W_h \geqslant \frac{\mu}{2}\{2(\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2 + \|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2) + I\}, \tag{72}$$

où

$$I=\frac{1}{2}\left((y_{1x_2}+y_{2\bar{x}_1})^2,\ 1\right)_{\omega_1^+\times+\omega_2}+\frac{1}{2}\left((y_{1\bar{x}_2}+y_{2x_1})^2,\ 1\right)_{+\omega_1\times\omega_2^+}.$$

Transformons l'expression I. Elevant au carré, puis transformant l'expression $(y_{1x_2},\ y_{2\bar{x}_1})_{\omega_1^+\times+\omega_2}$ d'abord à l'aide de la formule de sommation par parties (9) § 1 chapitre V sur la variable x_2, ensuite à l'aide de la formule (8) du même paragraphe sur la variable x_1, il vient

$$(y_{1x_2},\ y_{2\bar{x}_1})_{+\omega_1\times+\omega_2}=(y_{1x_1},\ y_{2\bar{x}_2})_{+\omega_1\times\omega_2^+}-\sum_{\omega_1^+} y_1 y_{2\bar{x}}\big|_{x_2=0}\,h_1.$$

De façon analogue on trouve

$$(y_{1\bar{x}_2},\ y_{2x_1})_{+\omega_1\times\omega_2^+}=(y_{1\bar{x}_1},\ y_{2x_2})_{\omega_1^+\times+\omega_2}-\sum_{+\omega_1} y_1 y_{2x_1}\big|_{x_2=0}\,h_1.$$

Ces expressions entraînent

$$I=\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2+(y_{1x_1},\ y_{2\bar{x}_2})_{+\omega_1\times\omega_2^+}+$$
$$+(y_{1\bar{x}_1},\ y_{2x_2})_{\omega_1^+\times+\omega_2}-\sum_{\omega_1^+}\frac{y_1+y_1^{(-1_1)}}{2}\,y_{2\bar{x}_1}h_1. \qquad (73)$$

Estimons maintenant le troisième et le quatrième terme du second membre de (73) à l'aide de l'inégalité de Cauchy et de ε-inégalité avec $\varepsilon=\alpha$, et le dernier terme à l'aide du théorème 6 § 4 chapitre V et de ε-inégalité avec $\varepsilon=\beta$. En définitive on obtient

$$I\geqslant\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2-\alpha\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2-\frac{1}{\alpha}\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2-$$
$$-\beta\left[\varepsilon_1\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2\right]-$$
$$-\frac{1}{\beta}\left[\varepsilon_2\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2+\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2\right]. \qquad (74)$$

Puisque $I\geqslant 0$, pour $\sigma\in[0,\ 1]$ on a $I\geqslant\sigma I$. Cette inégalité, l'inégalité (74) et l'expression (72) entraînent

$$2W_h\geqslant\mu\left\{\left[2-\sigma\left(\alpha+\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right)\right]\|y_{1\bar{x}_1}\|_0^2+\right.$$
$$+\left[2-\sigma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon_2}{\beta}\right)\right]\|y_{2\bar{x}_2}\|_0^2+$$
$$\left.+\sigma[1-\beta\varepsilon_1]\|y_{1\bar{x}_2}\|_0^2+\sigma\left[1-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right]\|y_{2\bar{x}_1}\|_0^2\right\}. \qquad (75)$$

Fixons les paramètres ε_2 et α. Choisissant ensuite le paramètre β à partir de la condition $\beta>(1/\varepsilon_2+l_1/\pi l_2)$, le paramètre ε_1 à partir

de la condition $0 < \varepsilon_1 < \beta^{-1}$ et enfin le paramètre σ à partir de

$$0<\sigma<\min\left\{1,\ 2\left[\alpha+\beta\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{l_1}{\pi l_2}\right)\right]^{-1},\ 2\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{\varepsilon_2}{\beta}\right]\right\},$$

on obtiendra au second membre de (75) une combinaison linéaire des normes des fonctions $y_{\alpha\bar{x}\beta}$, α, $\beta = 1, 2$ avec des coefficients positifs. Donc

$$2W_h \geqslant m\,(\|\nabla y_1\|_0^2+\|\nabla y_2\|_0^2), \tag{76}$$

où $m \equiv m\,(\mu, \alpha, \beta, \sigma, \varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$. L'inégalité (76) porte le nom *d'inégalité de Korn* du problème mixte traité.

En vertu du lemme 10 § 5 chapitre V on a $\|\Delta\, y_\alpha\|_0^2 \geqslant M_1\,\|y\|_1^2$, de sorte qu'au lieu de (76) on peut écrire

$$2W_h \geqslant mM_1\,(\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2).$$

Tenant compte de cette inégalité, on déduit de (71)

$$mM_1\,(\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{2}\left\{|(F_\alpha, y_\alpha)_{\bar{\omega}}|+\left|\sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha\,|_{x_2=0}\,h_1\right|\right\}. \tag{77}$$

Estimons le second membre de cette inégalité. En vertu de l'inégalité de Cauchy, du lemme 10 § 5 chapitre V et de ε-inégalité

$$|(F_\alpha, y_\alpha)_{\bar{\omega}}| \leqslant \varepsilon\,\|F_\alpha\|_0^2+\frac{M_2^2}{4\varepsilon}\,\|y_\alpha\|_1^2.$$

L'inégalité de Cauchy, le théorème 4 § 4 chapitre V et ε-inégalité entraînent

$$\left|\sum_{\omega_1} f_\alpha y_\alpha\Big|_{x_2=0} h_1\right| \leqslant \varepsilon\,\|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2+\frac{M_3^2}{4\varepsilon}\,\|y_\alpha\|_1^2$$

Tenant compte de ces estimations, on déduit de l'inégalité (77)

$$\left(mM_1-\frac{M_2^2}{4\varepsilon}-\frac{M_3^2}{4\varepsilon}\right)(\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2) \leqslant \varepsilon\sum_{\alpha=1}^{2}(\|F_\alpha\|_0^2+\|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2).$$

Choisissant ε suffisamment grand, on obtient l'estimation à priori suivante de la solution du problème (62), (69), (70) :

$$\|y_1\|_1^2+\|y_2\|_1^2 \leqslant M_4\sum_{\alpha=1}^{2}(\|F_\alpha\|_0^2+\|f_\alpha\|_{L_2(\omega_1)}^2)$$

Cette estimation à priori entraîne la solubilité du problème (62), (69), (70) et la convergence de sa solution vers celle du problème (60), (67), (68) avec la vitesse $O\,(|h|^2)$.

§ 2. Méthode de la fonction de Green

Soit le problème discret

$$\overline{\Lambda} y \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} \overline{\Lambda}_\alpha y = -\Phi(x), \quad x \in \overline{\omega}, \tag{1}$$

$$(\Phi, 1)_{\overline{\omega}} = 0, \tag{2}$$

$$(y, 1)_{\overline{\omega}} = q, \tag{3}$$

où

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \dfrac{2}{h_\alpha} y_{x\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ y_{\bar{x}\alpha} y_{x\alpha}, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ -\dfrac{2}{h_\alpha} y_{\bar{x}\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

On suppose que le réseau $\overline{\omega}$ est régulier. Considérons la fonction de Green de l'opérateur $\overline{\Lambda}$. Zéro étant un point du spectre de l'opérateur $\overline{\Lambda}$, associé à une fonction propre constante, la fonction considérée est une fonction de Green généralisée, qui se définit comme suit :

$$\overline{\Lambda} G(x, \xi) = \varkappa - \delta(x, \xi), \quad x \in \overline{\omega}, \quad \varkappa = (\operatorname{mes} D)^{-1}, \tag{4}$$

$$(G(x, \xi), 1)_{\overline{\omega}} = Q = \text{const}. \tag{5}$$

On s'assure au moyen de calculs simples que la solution du problème (1) à (3) peut s'écrire

$$y(x) = (G(x, \xi), \varphi(\xi))_{\overline{\omega}} + (G(x, \xi), g(\xi))_\gamma + \varkappa (y(\xi), 1)_{\overline{\omega}}. \tag{6}$$

En vertu de (6) on a

$$\| y(x) \|_C \leqslant \max_{x \in \overline{\omega}} (\| G(x, \xi) \|_{L_1} \| \varphi \|_C + \| G(x, \xi) \|'_{L_1} \| g \|'_C) + \varkappa | (y(\xi), 1)_{\overline{\omega}} |. \tag{7}$$

Si les normes $G(x, \xi)$ figurant dans (7) sont uniformément bornées sur $| h |$, alors (7) est l'estimation à priori de la solution du problème (1) à (3).

Pour estimer les normes de la fonction de Green, on se servira de son développement sur les fonctions propres de l'opérateur $\overline{\Lambda}$. On montre que la fonction $G(x, \xi)$ qui vérifie les expressions (4), (5) admet le développement suivant

$$G(x, \xi) = Q\varkappa + \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x) \mu_k(\xi)}{\lambda_k}, \tag{8}$$

où

$$|k|^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^2, \quad k_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,$$

et $\mu_k(x)$ et λ_k sont définis par les formules (33), (19), (20) § 3 chapitre V.

Lemme 1. *Si la projection de la fonction de Green $G(x, \xi)$ sur l'unité vérifie la condition*

$$Q \geqslant 2l_0^2, \quad l_0 = \max(l_1, l_2), \tag{9}$$

alors $G(x, \xi)$ n'est pas négative sur $\bar{\omega}$ et est telle que

$$\max_{x \in \bar{\omega}} \| G(x, \xi) \|_{L_1} = Q, \quad \max_{x \in \bar{\omega}} \| G(x, \xi) \|'_{L_1} \leqslant \left(2Q\varkappa + \frac{\pi^2}{6}\right)(l_1 + l_2)$$

Démonstration. Soit $G(x, \xi; d) \equiv G^{(1)}(x, \xi; d)$ la fonction de Green de l'opérateur $(\bar{\Lambda} - dE)$ $(d = \text{const} > 0)$ et $G^{(m)}(x, \xi; d)$ ses itérations définies par

$$(-\bar{\Lambda} + dE)^m G^m(x, \xi; d) = \delta(x - \xi), \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Comparons les fonctions $G(x, \xi)$ et $\sum_{m=1}^{n} d^{m-1} G^{(m)}(x, \xi; d)$. Les opérateurs $\bar{\Lambda}$, $(\bar{\Lambda} - dE)$ et $(\bar{\Lambda} - dE)^m$ possédant le même système de fonctions propres, on a

$$G^{(m)}(x, \xi; d) = \frac{\varkappa}{d^m} + \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{(\lambda_k + d)^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

De (8) et (10) il vient

$$G(x, \xi) - \sum_{m=1}^{n} d^{m-1} G^{(m)}(x, \xi; d) =$$

$$= \left(Q - \frac{n}{d}\right)\varkappa + d^n \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k + d)^n}. \tag{11}$$

Il est clair qu'en choisissant convenablement le paramètre n on peut toujours faire en sorte que la somme du second membre de (11) soit uniformément bornée en $|k|$. Dans le cas d'un espace de dimension deux, il suffit de prendre n égal à l'unité. Supposons que cette somme est bornée en module par une constante M. De (11) il vient alors

$$Q \geqslant 1/d + dM/\varkappa \equiv Q(d) \tag{12}$$

la fonction $G(x, \xi)$ est minorée par

$$G(x, \xi) \geqslant G^{(1)}(x, \xi; d). \tag{13}$$

Or le principe du maximum est valable pour l'opérateur $(\bar{\Lambda} - dE)$ pour $d > 0$, donc le corollaire 1 du théorème 1 § 3 chapitre III entraîne que $G(x, \xi; d) \geqslant 0$ *). La non-négativité de la fonction $G(x, \xi)$ entraîne visiblement l'estimation de sa norme sur $\bar{\omega}$ sous réserve que soit remplie (12). En effet,

$$\max_{x \in \bar{\omega}} \| G(x, \xi) \|_{L_1} = \max_{x \in \bar{\omega}} (G(x, \xi), 1)_{\bar{\omega}} = Q.$$

Par ailleurs

$$\| G(x, \xi) \|'_{L_1} = (G(x, \xi), 1)_\gamma = \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x)}{\lambda_k} (\mu_k(\xi), 1)_\gamma + Q\varkappa \operatorname{mes} \Gamma. \tag{14}$$

Mais

$$(\mu_k(\xi), 1)_\gamma = (\mu_{k_1}(\xi_1) \mu_{k_2}(\xi_2), 1)_\gamma =$$
$$= \delta_{0, k_1} [\mu_{k_2}(0) + \mu_{k_2}(l_2)] / \sqrt{l_1} + \delta_{0, k_2} [\mu_{k_1}(0) + \mu_{k_1}(l_1)] / \sqrt{l_2},$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker.

Portant cette expression dans (14) et tenant compte de (33), (19), (21) § 3 chapitre V, on obtient

$$\| G(x, \xi) \|'_{L_1} = \sum_{k_1=1}^{N_1} \mu_{k_1}(x_1) (\mu_{k_1}(0) + \mu_{k_1}(l_1)) / \lambda_{k_1} +$$
$$+ \sum_{k_2=1}^{N_2} \mu_{k_2}(x_2) (\mu_{k_2}(0) + \mu_{k_2}(l_2)) / \lambda_{k_2} + Q\varkappa \operatorname{mes} \Gamma \leqslant$$
$$\leqslant (l_1 + l_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + Q\varkappa \operatorname{mes} \Gamma = \left(2Q\varkappa + \frac{\pi^2}{6} (l_1 + l_2)\right). \tag{15}$$

Montrons maintenant que la non-négativité de $G(x, \xi)$ sous l'hypothèse (12) entraîne sa non-négativité sous l'hypothèse (9). Pour cela cherchons une constante M qui majorera en valeur absolue la somme du second membre de (11). Tenant compte de la forme des fonctions $\mu_k(x)$ (33) § 3 chapitre V, on obtient

$$\left| \sum_{|k| \neq 0} \frac{\mu_k(x) \mu_k(\xi)}{\lambda_k (\lambda_k + d)} \right| \leqslant 4\varkappa \sum_{|k| \neq 0} \lambda_k^{-1} (\lambda_k + d)^{-1}, \tag{16}$$

Or en vertu de (33) et (21) § 3 chapitre V

$$\lambda_k \geqslant \frac{4}{l_0^2} (k_1^2 + k_2^2),$$

*) La non-négativité de la fonction de Green $G^{(1)}(x, \xi; d)$ entraîne celle de toutes ses itérations, puisque

$$G^2(x, \xi; d) = (G^{(1)}(x, \eta; d), G^{(1)}(\eta, \xi; d))_{\bar{\omega}}.$$

BeatriceGloria_personal library

donc

$$\sum_{|k|\neq 0} \lambda_k^{-1}(\lambda_k+d)^{-1} \leqslant (l_0/2)^4 \sum_{|k|\neq 0}^{\infty} |k|^{-4} =$$

$$= (l_0/2)^4 \left[2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} - \frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(1+k^2)^{-2} + \sum_{k_1,\,k_2=2}^{\infty}(k_1^2+k_2^2)^{-2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant (l_0/2)^4 \left[\frac{\pi^4}{45} - \frac{1}{4} + 2\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} + \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{dr}{r^3}\right] =$$

$$= (l_0/2)^4 \left[\frac{\pi^4}{45} + \frac{2\pi-1}{2}\right] < l_0^4/4. \qquad (17)$$

Portant cette estimation dans (16), il vient

$$\left|\sum_{|k|\neq 0} \frac{\mu_k(x)\,\mu_k(\xi)}{\lambda_k(\lambda_k+d)}\right| \leqslant \varkappa l_0^4.$$

i.e. la constante M. Pour achever la démonstration utilisons cette estimation et calculons le minimum de la fonctionnelle $Q(d)$ sur d. Il est immédiat que

$$\min_{d>0} Q(d) = 2l_0^2.$$

C.Q.F.D.

Théorème 1. *Le problème* (1) *à* (3) *admet une solution et une seule telle que*

$$\|y\|_C \leqslant 2l_0^2\|\varphi\|_C + \left(4l_0^2\varkappa + \frac{\pi^2}{6}\right)(l_1+l_2)\|g\|_C' + \varkappa\,|[y,1]|.$$

Démonstration. L'existence et l'unicité de la solution découlent du théorème 5 du paragraphe précédent, l'estimation à priori, du lemme 1 et de l'inégalité (7).

Le théorème 1 et les résultats du paragraphe précédent entraînent le

Théorème 2. *Si pour* $k_\alpha(x) \equiv 1$, $d(x) \equiv x = 0$ *la solution du problème* (40), (41), (58), (59) § 1 $u(x) \in C^{(4)}(D)$, *la solution du problème* (1) *à* (3) *avec des seconds membres calculables à l'aide du théorème* 9 § 1 *converge uniformément vers celle du problème à approcher avec la vitesse* $O(|h|^2)$, *i.e.*

$$\|y - u\|_C \leqslant M\,|h|^2,$$

où M *est une constante positive ne dépendant pas de* $|h|$.

Voir aussi [2], [5], [11], [9].

BIBLIOGRAPHIE

1. Wasow W., Forsythe G., Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, New York, 1960.
2. Diakonov E., Méthodes discrètes de résolution des problèmes aux limites (problèmes stationnaires), Moscou, éd. de l'Université de Moscou, 1971.
3. Kantorovitch L., Krylov V., Méthodes approchées d'analyse supérieure, Moscou, Fizmatguiz, 1962.
4. Collatz L., Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin Ouest, 1951.
5. Ladyjenskaïa O., Problèmes aux limites de physique mathématique, Moscou, éd. « Naouka », 1973.
6. Martchouk G., Méthodes de calcul mathématique, Novossibirsk, « Naouka », 1969.
7. Mikhline S., Méthodes variationnelles de physique mathématique, Moscou, « Naouka », 1969.
8. Mouskhélishvili N., Quelques problèmes fondamentaux de théorie mathématique de l'élasticité, Moscou, « Naouka », 1966.
9. Oganésïan L., Rivkind V., Roukhovets L., Méthodes variationnelles discrètes de résolution d'équations elliptiques, p.p. 1 et 2, dans le recueil « Equations différentielles et leur emploi », Vilnus, Piargalé, 1974.
10. Pétrovski I., Conférences sur les équations aux dérivées partielles, Moscou, Fizmatguiz, 1961.
11. Samarski A., Introduction à la théorie des schémas discrets, Moscou, « Naouka », 1971.
12. Tykhonov A., Samarski A., Equations de physique mathématique, Moscou, « Naouka », 1972.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Approximation
— d'ordre n 41
— relativement à une norme 41
— sur le réseau Ω 40
Articulation parfaite 192

Base 65

Coefficient de conductibilité thermique 9
Composantes 21, 24
Conditions
— aux limites naturelles 78
— de conjugaison au point d'assemblage par une articulation parfaite 192

Différences
— centrales 38
— progressives 38
— régressives 38

Equation
— du bilan 61
— elliptique dans un domaine 30
— — en un point 30
— — uniformément dans un domaine D 30
— d'Euler 65
— polyharmonique 31

Erreur d'approxitation 38
Fonction
— discrète 37
— majorante 126
Fonctionnelles stencils 51
Fonctions propres 247
Forces de cisaillement 26

Formule
— de Green discrète (deuxième) 225
— — — — (première) 225
— de sommation par parties 233

Homogénéité d'un schéma 51

Inégalité
— de Cauchy 226
— de Korn 300
— (ε-) 226

Loi
— de conservation 55
— de Fourier 9
— de Nernst 12
— d'Ohm 15
— généralisée de Hooke 24

Moments
— de flexion 26
— de torsion 26

Opérateur discret 38

Problème aux limites
— — — deuxième 180
— — — premier 180
— — — troisième 180
Produit scalaire 223

Réseau
— accordé 116, 175
— carré 37
— connexe 123
— irrégulier 37
— rectangulaire 37
— régulier 37, 123

Schéma
— conservatif 56
— correct 54
— stable 54
Solution généralisée de $W_2^1(G)$
— — — — d'une équation 33
— — — — d'un problème 33
Stencil 38
— de trois points 39
Système elliptique
— — en un domaine 36
— — en un point 36

Tenseur
— de contrainte 21
— de déformation 25
— des modules d'élasticité 24

Valeurs propres 247
Vecteur déplacement 20

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5

Chapitre I. PROLOGUE 9

§ 1. Exemples de problèmes se ramenant à des équations elliptiques 9
§ 2. Considérations générales sur les équations elliptiques 29

Chapitre II. MÉTHODES DE CONSTRUCTION DES SCHÉMAS DISCRETS 36
§ 1. Principe de la méthode des différences finies 36
§ 2. Principes de construction des schémas discrets 49
§ 3. Méthodes de construction des schémas discrets 61

Chapitre III. SCHÉMAS DISCRETS POUR L'ÉQUATION DE POISSON. PRINCIPE DU MAXIMUM 94

§ 1. Construction de schémas discrets pour l'équation de Poisson . . . 94
§ 2. Position des problèmes aux limites discrets pour l'équation de Poisson dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet 112
§ 3. Principe du maximum 122
§ 4. Estimations à priori et estimations de la vitesse de convergence du problème discret de Dirichlet pour l'équation de Poisson 128

Chapitre IV. SCHÉMAS DISCRETS POUR LES PRINCIPAUX PROBLÈMES AUX LIMITES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE 140

§ 1. Problèmes aux limites pour équations du second ordre 140
§ 2. Approximations discrètes des équations du second ordre 148
§ 3. Approximation des conditions de conjugaison et des conditions aux limites pour équations du second ordre 160
§ 4. Problèmes aux limites pour systèmes d'équations de la théorie de l'élasticité 179
§ 5. Problèmes aux limites pour équations du quatrième ordre 188
§ 6. Approximation des problèmes aux limites pour équations d'ordre quatre 202

Chapitre V. APPAREIL MATHÉMATIQUE DE LA THÉORIE DES SCHÉMAS DISCRETS 223

§ 1. Notations, formules discrètes et quelques inégalités 223
§ 2. Modèles unidimensionnels 227
§ 3. Problèmes discrets aux valeurs propres 246
§ 4. Théorèmes de plongement 253
§ 5. Minorations relatives à quelques opérateurs 270

Chapitre VI. ESTIMATIONS À PRIORI 283
§ 1. Méthode des inégalités de l'énergie 283
§ 2. Méthode de la fonction de Green 301
Bibliographie 305
Index 306